UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICA

Las ecuaciones de Maxwell en el contexto de álgebra geométrica

TESIS

Para optar el título profesional de licenciado en matemática

AUTOR

Javier Moore Delgado

Lima – Perú

2014

LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN EL CONTEXTO DEL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

Br. Javier Moore Delgado

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de licenciado en matemática.

Aprobada por:

....
Dr. Jose Raúl Luyo Sanchez .
Presidente del Jurado

....
Mg. Thomas Nuñez Lay.
Miembro del Jurado

....
Dr. Edgar Vera Saravia.
Miembro Asesor

Lima - Perú
Diciembre - 2014

FICHA CATALOGRÁFICA

JAVIER MOORE DELGADO

Las ecuaciones de Maxwell en el contexto del álgebra geométrica,(lima)2014.

viii,91p.,29.7 cm, (UNMSM,Licenciado,Matemática,2014)

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1.Matemática

I.UNMSM/Facultad de Ciencias Matemáticas

II.Las ecuaciones de Maxwell en el contexto del álgebra geométrica (Álgebra Geométrica).

Esta tesis está dedicada a mis padres Marcial y Justina por darme todo su apoyo cuando era estudiante y gracias a ellos pude estar en una gran institución, la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

AGRADECIMIENTOS

Al finalizar un trabajo tan laborioso y lleno de dificultades como es la elaboración de una tesis, es inevitable no sentirse orgulloso de increíble azaña y entonces empezamos a recordar por todo los sacrificios por lo que tuvimos que pasar, por ejemplo estar trabajando en nuestra tesis hasta altas horas de la noche y descansar dos o tres horas para luego levantarse para ir a clases o a trabajar, almorzar tarde , dejar de hacer otras cosas para estar trabajando en la tesis o cuando se te dañó la USB o el laptop y no guardaste una copia de la tesis , en fin , así puedo contarles de las cosas que suelen pasarnos a la hora de estar con la elaboración de una tesis. Sin duda toda una aventura para contarles a nuestros hijos cuando estén por esta situación.

Pero también en ese momento recordamos que esto no lo hubieramos podido lograr solos pues muchas veces, nos desanimábamos, perdíamos el entusiasmo y todo lo que tiende a pasar cuando las cosas no se nos están dando como queremos y es cuando entra dios y nos ilumina, nuestros padres, hermanos, familia, incluso nuestro asesor de tesis y toda esa gente que de una manera u otro siempre estuvo a nuestro lado apoyándonos, levantando cada vez que nos rendíamos, dándonos animo o apoyo económico.

Vamos a los agradecimientos. Agradezco a Dios por protegerme durante todo mi camino y darme fuerzas para superar obstáculos y dificultades a lo largo de toda mi vida.

Agradezco también la confianza y el apoyo brindado por parte de mis padres, que sin duda alguna en el trayecto de mi vida me ha demostrado su amor, corrigiendo mis faltas y celebrando mis triunfos.

Un agradecimiento especial a mi esposa Maria , quien con su cariño y comprensión ha sido parte fundamental de mi vida.

A los docentes de la facultad de ciencias matemáticas, por su profesionalismo y ejemplo en el transcurso de mi carrera universitaria.

Finalmente al Dr. Edgar Vera Saravia , un eminente profesor , gran profesional y amigo , cada una con sus valiosas aportaciones hicieron posible esta tesis.

Y gracias a todos los que me brindaron su ayuda en este proyecto.

RESUMEN

LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN EL CONTEXTO DEL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

JAVIER MOORE DELGADO

DICIEMBRE - 2014

Orientador:	Dr. Edgar Vera Saravia
Titulo obtenido:	Licenciado en Matemática

. . . .

En la fisica clasica, las ecuaciones de Maxwell unifica la teoria de la electricidad y el magnetismo en una sola teoria: Electromagnetismo
En este trabajo se presenta las ecuaciones de Maxwell desde el punto de vista del álgebra geométrica.
Se desarrollan dos algebras asociativas: el álgebra geométrica euclideana tridimensional denotada con AG(3) y el álgebra geométrica pseudoeuclideana AG(3,1), las cuales van a servir como el modelo matemático a seguir para unificar las cuatro ecuaciones de Maxwell en una sola ecuacion.

PALABRAS CLAVES: ÁLGEBRA GEOMÉTRICA
DERIVADA GEOMÉTRICA
CAMPOS MULTIVECTORIALES
ECUACIONES DE MAXWELL

ABSTRACT

MAXWELL'S EQUATIONS IN THE CONTEXT OF GEOMETRIC ALGEBRA

JAVIER MOORE DELGADO

DECEMBER - 2014

Advisor: Dr. Edgar Vera Saravia
Obtained Title: Licentiate in Mathematic

. . . .

In classical physics , Maxwell's equations unified theory of electricity and magnetism into a single theory: electromagnetism.
In this work the Maxwell equations is presented from the point of view of geometric algebra.
Develop two associative algebras : the algebra dimensional Euclidean geometric denoted AG (3) and the geometric algebra pseudoeuclideana AG (3,1), which will serve as the mathematical model to unify the four Maxwell equations into a single equation .

KEYWORDS: GEOMETRIC ALGEBRA
DERIVATE GEOMETRIC
CAMPOS MULTIVECTOR
MAXWELL EQUATIONS

Índice general

Introducción

El objetivo del presente trabajo es, utilizando el formalismo elegante del álgebra geométrica, mostrar que es posible construir modelos matemáticos que permiten expresar leyes naturales mediante fórmulas invariantes, es decir; que no dependen de un sistema de referencia particular. Tratamos específicamente el caso de las ecuaciones de Maxwell de la teoría del electromagnetismo.

Con base en los estudios realizados por diversos científicos desde finales del siglo XVIII , sobre todo de Michael Faraday ,que relacionaban las interacciones entre los campos eléctricos, los campos magnéticos y las fuentes que las producían, James Clerk Maxwell (1831-1879) unificó, en 1864, todos los fenómenos eléctricos y magnéticos observables en un trabajo que estableció conexiones entre las diversas teorías de la época, derivando una de las más elegantes teorías en su obra publicada en 1865, A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field. Maxwell demostró, con esta nueva teoría, que todos los fenómenos eléctricos y magnéticos se podrían describir en tan sólo cuatro ecuaciones ahora conocidas como las ecuaciones de Maxwell. Estas son las ecuaciones básicas para el electromagnetismo, así como la ley de la gravitación universal y las tres leyes de Newton son fundamentales para la mecánica clásica. No se presentan en este trabajo las deducciones y explicaciones de las ecuaciones de Maxwell, ya que estas requieren conocimientos avanzados de física.

Las ecuaciones de Maxwell demostraron que la electricidad, el magnetismo y hasta la luz, son manifestaciones del mismo fenómeno: el campo electromagnético. Desde ese momento, todas las otras leyes y ecuaciones clásicas de estas disciplinas se convirtieron en casos simplificados de las ecuaciones de Maxwell. Su trabajo sobre electromagnetismo ha sido llamado la "segunda gran unificación en física", después de la primera llevada a cabo por Isaac Newton.

Las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo incluyen la unificación de las leyes de Gauss, para la electricidad y el magnetismo, la ley de Ampère y la ley de inducción electromagnética de Faraday.

A continuación las ecuaciones de Maxwell bajo ciertas condiciones fisicas.

$$\nabla \times B = \partial_t E + J \qquad Ley\ de\ Ampere$$

$$\nabla \cdot B = 0 \qquad Ley\ de\ Gauss\ para\ campos\ magneticos$$

$$\nabla \times E = -\partial_t B \qquad Ley\ de\ Faraday$$

$$\nabla \cdot E = \rho \qquad Ley\ de\ Gauss\ para\ campos\ electricos$$

Es importante aclarar que Maxwell no escribió sus fórmulas en notación vectorial, sino que planteó todo en un sistema de ecuaciones en cuaterniones. Su planteamiento fue esencialmente algebraico. Originalmente fueron veinte ecuaciones, que el mismo Maxwell redujo a trece. Luego Heaviside, en colaboración con Gibbs y Hertz, independientemente, produjeron las fórmulas como se muestra en las ecuaciones anteriores, y que actualmente maneja la ciencia.

En 1884, Oliver Heaviside junto con Willard Gibbs agrupó estas ecuaciones y las reformuló en la notación vectorial actual. Sin embargo, la convicción física de unificar las teorías y asumiendo que las ondas electromagnéticas se encuentran en un medio uniforme y estacionario, se condensó las ecuaciones de Maxwell en una única ecuación, Silberstein (1907) con vectores complejos , Silberstein (1912/1914) con cuaterniones complejos, Laporte Uhlenbeck (1931) con espinores y Juvet Schidlof (1932), Mercier (1935) , Riesz (1958) lo hicieron utilizando algebras de Clifford.

Este trabajo propone condensar las ecuaciones de Maxwell en una única ecuación utilizando una alternativa de álgebra de Clifford: **El álgebra geométrica**, se define a este como el subespacio de cierto anillo de polinomios , el cual bajo condiciones obtendrá una estructura multivectorial, se crean las herramientas necesarias como: funciones y campos multivectoriales, derivada geométrica, exterior e interior, todas estas, harán posible la unificación de las ecuaciones. Un bosquejo de estas ideas están en las referencias al final del trabajo de tesis , especial enfasis en [1], [2], [9], [13] y [12] en ese orden.

En el **capitulo 1** se presentan los conceptos del álgebra geométrica euclideana tridimensional AG(3) que usaremos posteriormente, producto geométrico, subálgebras, los productos exterior, interior y escalar que se derivan naturalmente del producto geométrico. Se presenta la buena definición del producto vectorial, que corrige la utilizada en el álgebra vectorial del $\mathbb{R}^3$. Finalmente se muestra que la métrica euclidiana del $\mathbb{R}^3$ es determinada por la estructura matemática de AG(3).

En el **capitulo 2** se presentan aquellos aspectos del cálculo de las funciones con valores en AG(3) como la derivada geométrica que unifica los conceptos de gradiente, divergencia y rotacional.

En el **capitulo 3** se trata del álgebra geométrica tetradimensional AG(3,1) siguiendo una secuencia similar al capítulo 1. Se presenta una diferencia notable con el caso euclideano, el producto geométrico en AG(3,1) determina una métrica pseudoeuclideana en el espacio $\mathbb{R}^4$, precisamente la métrica de Minkowski o espacio-tiemporal.

En el **capitulo 4** se trata de la derivada geométrica de funciones con valores en AG(3,1) y se precisa su relación con la derivada geométrica en AG(3).

En el **capitulo 5** utilizando el formalismo del álgebra geométrica establecido en los capítulos anteriores, se expresan de forma invariante las cuatro ecuaciones de Maxwell mediante una única fórmula en AG(3) y AG(3,1).

Capítulo 1

El álgebra geométrica AG(3)

1.1. Álgebra geométrica tridimensional

Definición 1.1.1. *. Denotando con* $\mathbb{R}[e_1, e_2, e_3]$ *el anillo de los polinomios con coeficientes reales en las variables* e_1, e_2, e_3 *.*

El ***álgebra geométrica tridimensional****, denotada con AG(3) , es el subespacio vectorial*

$$AG(3) := \{M \in \mathbb{R}[e_1, e_2, e_3]; M = \sum_{k=0}^{3} \sum_{|I|=k} a_I e_I\}$$

provisto del producto de polinomios modificado por la condición

$$\boxed{e_j e_i + e_i e_j = 2\delta_{ij}}$$

llamada ***condición de Dirac*** *para todo* $i, j \in \{1, 2, 3\}$

I denota a los multi-indices de longitud $|I| = k$ *,* $0 \leq k \leq 3$
$a_I \in \mathbb{R}$ *y* δ_{ij} *es la función delta de Kronecker definida por:*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \;\; i = j \\ 0 & si \;\; i \neq j \end{cases}$$

Observación 1. .

1. $\mathbb{R}[e_1, e_2, e_3]$ *no solo tiene estructura de anillo, tambien es un espacio vectorial. De ahi que AG(3) es considerado un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}[e_1, e_2, e_3]$

2. *Considerar* e_1, e_2, e_3 *como variables , en este contexto , tiene un claro objetivo: Identificarlos con la base canónica de* $\mathbb{R}^3$ *como para considerarlo un subespacio vectorial de AG(3).(Esto se verá en la sección 1.3)*

3. *Explicitamente los elementos de AG(3) se escriben*

$$M = a_0 \; + \; \sum_{i=1}^{3} a_i e_i \; + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} a_{ij} e_i e_j \; + \; a_{123} e_1 e_2 e_3$$

   con $a_0, a_i, a_{ij}, a_{123} \in \mathbb{R}$

4. *Para abreviar se escribirá:*

   $e_{12} = e_1e_2$, $e_{13} = e_1e_3$, $e_{23} = e_2e_3$

   $e_{123} = e_1e_2e_3$

   y por lo tanto escribiremos

   $$M = a_0 \; + \; \sum_{i=1}^{3} a_ie_i \; + \sum_{1\leq i<j\leq 3} a_{ij}e_{ij} \; + \; a_{123}e_{123}$$

5. *El producto de polinomios modificado por la condición de Dirac es llamado* ***producto geométrico*** *en AG(3)*

6. *Veamos que AG(3), con el producto geométrico , es un* ***álgebra real asociativa de dimensión 8*** *con base*

   $\{1 \;\; , \;\; e_1, e_2, e_3 \;\; , \;\; e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3 \;\; , \;\; e_1e_2e_3\}$

   elementos que son llamados

   1: cero - vector básico

   e_1, e_2, e_3*: vectores básicos*

   e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3*: bivectores basicos*

   $e_1e_2e_3$*: trivector básico*

7. *Los elementos de $AG(3)$ son llamados* ***multivectores****.*

Teorema 1.1.2. *AG(3) con el producto geométrico es un $\mathbb{R}$ - álgebra asociativa de dimensión 8 y base*

$$\{1 \; , \; e_1 \; , \; e_2 \; , \; e_3 \; , \; e_{12} \; , \; e_{13} \; , \; e_{23} \; , \; e_{123}\}$$

Demostración. .

Antes de mostrar que el poducto geométrico es cerrado en AG(3),veamos que si

$e_ie_je_k$ $\in$AG(3) con $0 \leq i, j, k \leq 3$

$e_le_me_n \in$ AG(3) con $0 \leq l, m, n \leq 3$

entonces

$(e_ie_je_k)(e_le_me_n) = e_re_se_t \in$ AG(3) con $0 \leq r, s, t \leq 3$

en efecto

1^{o} caso: Si solo hay 1 indice i $\in \{0, 1, 2, 3\}$

es decir i = j = k = l = m = n

$(e_ie_ie_i)(e_ie_ie_i) = 1 \equiv e_0$

2^{o} caso: Hay 2 indices diferenctes r , s $\in \{0, 1, 2, 3\}$

$(e_ie_je_k)(e_le_me_n) = \pm e_re_s$

3^{o} caso: Hay 3 indices diferenctes r , s , t $\in \{0,1,2,3\}$

$(e_ie_je_k)(e_le_me_n) = \pm e_re_se_t$

Genericamente se escribirá

$e_I = e_ie_je_k$ con $|I| \in \{0,1,2,3\}$

$e_J = e_le_me_n$ con $|J| \in \{0,1,2,3\}$

$e_L = e_re_se_t$ con $|L| \in \{0,1,2,3\}$

y por tanto

$e_Ie_J = e_L$

Sean, ahora M , N $\in$ AG(3) con

$$M = \sum_{n=0}^{3} \sum_{|I|=n} a_I e_I$$

$$N = \sum_{m=0}^{3} \sum_{|J|=m} b_J e_J$$

luego

$$MN = (\sum_{n=0}^{3} \sum_{|I|=n} a_I e_I)(\sum_{m=0}^{3} \sum_{|J|=m} b_J e_J)$$

$$= \sum_{n=0}^{3} (\sum_{|I|=n} a_I e_I)(\sum_{m=0}^{3} \sum_{|J|=m} b_J e_J)$$

$$= \sum_{n=0}^{3} \sum_{m=0}^{3} (\sum_{|I|=n} a_I e_I)(\sum_{|J|=m} b_J e_J)$$

$$= \sum_{n=0}^{3} \sum_{m=0}^{3} \sum_{|I|=n} (a_I e_I)(\sum_{|J|=m} b_J e_J)$$

$$= \sum_{n=0}^{3} \sum_{m=0}^{3} \sum_{|I|=n} \sum_{|J|=m} (a_I e_I)(b_J e_J)$$

$$= \sum_{n=0}^{3} \sum_{m=0}^{3} \sum_{|I|=n} \sum_{|J|=m} a_I b_J e_I e_J$$

$$= \sum_{n=0}^{3} \sum_{m=0}^{3} \sum_{|I|=n} \sum_{|J|=m} a_I b_J e_L \quad \in AG(3)$$

por lo tanto el producto geométrico es cerrado en AG(3).

AG(3) y el producto geométrico heredan la estructura del anillo de polinomios $\mathbb{R}[e_1, e_2, e_3]$

y producto de polinomios , de esto , para todo M , N , P $\in$ AG(3) y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple

(αM)N = M(αN) = α(MN)

(M + N)P = MN + NP

P(M + N) = PM + PN

(MN)P = M(NP)

Todas estas propiedades hacen de AG(3) un $\mathbb{R}$ - álgebra asociativa.

Por definición el conjunto $\{1\ ,\ e_1\ ,\ e_2\ ,\ e_3\ ,\ e_{12}\ ,\ e_{13}\ ,\ e_{23}\ ,\ e_{123}\}$ genera AG(3)

Ahora se verificará que $\{1\ ,\ e_1\ ,\ e_2\ ,\ e_3\ ,\ e_{12}\ ,\ e_{13}\ ,\ e_{23}\ ,\ e_{123}\}$ es linealmente independiente en AG(3).

Primero el conjunto $\{1\ ,\ e_{123}\}$ es linealmente independiente (l.i) en AG(3), en efecto, sean $a_0\ ,\ a_{123} \in \mathbb{R}$ tal que

$a_0 + a_{123}e_{123} = 0$

$a_0 = -a_{123}e_{123}$

$a_0a_0 = (-a_{123}e_{123})(-a_{123}e_{123})$

$a_0^2 = a_{123}^2e_{123})e_{123}$

$0 \leq a_0^2 = -a_{123}^2 \leq 0$

$a_0^2 = a_{123}^2 = 0$

$a_0 = a_{123} = 0$

por lo tanto $\{1\ ,\ e_{123}\}$ es l.i

Sean $a_0\ ,\ a_i\ ,\ a_{ij}\ ,\ a_{123} \in \mathbb{R}$ tal que

$a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23} + a_{123}e_{123} = 0$ .... (1)

multiplicando (1) por la derecha e izquierda por e_{12}

$e_{12}(a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23} + a_{123}e_{123})e_{12} = 0$

$e_{12}a_0e_{12}+e_{12}a_1e_1e_{12}+e_{12}a_2e_2e_{12}+e_{12}a_3e_3e_{12}+e_{12}a_{12}e_{12}e_{12}+e_{12}a_{13}e_{13}e_{12}+e_{12}a_{23}e_{23}e_{12}+e_{12}a_{123}e_{123}e_{12} = 0$

$a_0e_{12}e_{12}+a_1e_{12}e_1e_{12}+a_2e_{12}e_2e_{12}+a_3e_{12}e_3e_{12}+a_{12}e_{12}e_{12}e_{12}+a_{13}e_{12}e_{13}e_{12}+a_{23}e_{12}e_{23}e_{12}+a_{123}e_{12}e_{123}e_{12} = 0$

$a_0(-1)+a_1(-e_1e_{12})e_{12}+a_2(-e_2e_{12})e_{12}+a_3(e_3e_{12})e_{12}+a_{12}e_{12}(-1)+a_{13}(-e_{13}e_{12})e_{12}+a_{23}(-e_{23}e_{12})e_{12} + a_{123}(e_{123}e_{12})e_{12} = 0$

$-a_0 - a_1e_1e_{12}e_{12} - a_2e_2e_{12}e_{12} + a_3e_3e_{12}e_{12} - a_{12}e_{12} - a_{13}e_{13}e_{12}e_{12} - a_{23}e_{23}e_{12}e_{12} + a_{123}e_{123}e_{12}e_{12} = 0$

$-a_0 - a_1e_1(-1) - a_2e_2(-1) + a_3e_3(-1) - a_{12}e_{12} - a_{13}e_{13}(-1)$

$-a_{23}e_{23}(-1) + a_{123}e_{123}(-1) = 0$

$-a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 - a_3e_3 - a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23} - a_{123}e_{123} = 0$ .... (2)

Sumando (1) y (2)

$2a_1e_1 + 2a_2e_2 + 2a_{13}e_{13} + 2a_{23}e_{23} = 0$

$a_1e_1 + a_2e_2 + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23} = 0$ .... (3)

multiplicando (3) por la derecha e izquierda por e_{13}

$e_{13}(a_1e_1 + a_2e_2 + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23})e_{13} = 0$

$e_{13}a_1e_1e_{13} + e_{13}a_2e_2e_{13} + e_{13}a_{13}e_{13}e_{13} + e_{13}a_{23}e_{23}e_{13} = 0$

$a_1e_{13}e_1e_{13} + a_2e_{13}e_2e_{13} + a_{13}e_{13}e_{13}e_{13} + a_{23}e_{13}e_{23}e_{13} = 0$

$a_1(-e_1e_{13})e_{13} + a_2(e_2e_{13})e_{13} + a_{13}(e_{13}e_{13})e_{13} + a_{23}(-e_{23}e_{13})e_{13} = 0$

$-a_1e_1(e_{13}e_{13}) + a_2e_2(e_{13}e_{13}) + a_{13}e_{13}(e_{13}e_{13}) - a_{23}e_{23}(e_{13}e_{13}) = 0$

$-a_1e_1(-1) + a_2e_2(-1) + a_{13}e_{13}(-1) - a_{23}e_{23}(-1) = 0$

$a_1e_1 - a_2e_2 - a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23} = 0$ .... (4)

Sumando (3) y (4)

$2a_1e_1 + 2a_{23}e_{23} = 0$

$a_1e_1 + a_{23}e_{23} = 0$

multiplicando por e_1, por izquierda la última igualdad

$e_1(a_1e_1 + a_{23}e_{23}) = 0$

$e_1a_1e_1 + e_1a_{23}e_{23} = 0$

$a_1e_1e_1 + a_{23}e_1e_{23} = 0$

$a_1 + a_{23}e_{123} = 0$

por lo tanto

$a_1 = a_{23} = 0$

Por otro lado , restando (3) y (4)

$2a_2e_2 + 2a_{13}e_{13} = 0$

$a_2e_2 + a_{13}e_{13} = 0$

multiplicando por e_2 la última igualdad

$e_2(a_2e_2 + a_{13}e_{13}) = 0$

$e_2a_2e_2 + e_2a_{13}e_{13} = 0$

$a_2e_2e_2 + a_{13}e_2e_{13} = 0$

$a_2 + a_{13}(e_2e_1)e_3 = 0$

$a_2 + a_{13}(-e_1e_2)e_3 = 0$

$a_2 - a_{13}e_1e_2e_3 = 0$

$a_2 - a_{13}e_{123} = 0$

por lo tanto

$a_2 = -a_{13} = 0$

$a_2 = a_{13} = 0$

reemplazando $a_1 = a_2 = a_{13} = a_{23} = 0$ en (1) se obtiene

$a_0 + a_3e_3 + a_{12}e_{12} + a_{123}e_{123} = 0$ .... (5)

multiplicando (5) por la derecha e izquierda por e_{13}

$e_{13}(a_0 + a_3e_3 + a_{12}e_{12} + a_{123}e_{123})e_{13} = 0$

$e_{13}a_0e_{13} + e_{13}a_3e_3e_{13} + e_{13}a_{12}e_{12}e_{13} + e_{13}a_{123}e_{123}e_{13} = 0$

$a_0e_{13}e_{13} + a_3e_{13}e_3e_{13} + a_{12}e_{13}e_{12}e_{13} + a_{123}e_{13}e_{123}e_{13} = 0$

$a_0(-1) + a_3(-e_3e_{13})e_{13} + a_{12}(-e_{12}e_{13})e_{13} + a_{123}(e_{123}e_{13})e_{13} = 0$

$-a_0 - a_3e_3(e_{13}e_{13}) - a_{12}e_{12}(e_{13}e_{13}) + a_{123}e_{123}(e_{13}e_{13}) = 0$

$-a_0 - a_3e_3(-1) - a_{12}e_{12}(-1) + a_{123}e_{123}(-1) = 0$

$-a_0 + a_3e_3 + a_{12}e_{12} - a_{123}e_{123} = 0$ .... (6)

Sumando (5) y (6)

$2a_3e_3 + 2a_{12}e_{12} = 0$

$a_3e_3 + a_{12}e_{12} = 0$

multiplicando por e_3 la última igualdad

$(a_3e_3 + a_{12}e_{12})e_3 = 0$

$a_3e_3e_3 + a_{12}e_{12}e_3 = 0$

$a_3 + a_{12}e_{123} = 0$

por lo tanto

$a_3 = a_{12} = 0$

reemplazando $a_1 = a_2 = a_3 = a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ en (1) se obtiene

$a_0 + a_{123}e_{123} = 0$

por lo tanto

$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{123} = 0$ es decir

$\{1\ ,\ e_1\ ,\ e_2\ ,\ e_3\ ,\ e_{12}\ ,\ e_{13}\ ,\ e_{23}\ ,\ e_{123}\}$ es linealmente independiente en AG(3) , en consecuencia base de AG(3) y dim(AG(3)) = 8.

∎

Si se desarrolla la sumatoria de un multivector M $\in$ AG(3)

$$M = \sum_{k=0}^{3} \sum_{|I|=k} a_I e_I = \sum_{|I|=0} a_I e_I + \sum_{|I|=1} a_I e_I + \sum_{|I|=2} a_I e_I + \sum_{|I|=3} a_I e_I$$

se puede identificar

$$\sum_{|I|=0} a_I e_I = a_0$$

$$\sum_{|I|=1} a_I e_I = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$\sum_{|I|=2} a_I e_I = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} a_{ij} e_{ij} = a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23}$$

$$\sum_{|I|=3} a_I e_I = a_{123} e_{123}$$

en este sentido, tambien se puede escribir

$e_I \in \{e_1, e_2, e_3\}$ si $|I| = 1$ ó $I \in \{1, 2, 3\}$

$e_I \in \{e_{12}, e_{13}, e_{23}\}$ si $|I| = 2$ ó $I \in \{12, 13, 23\}$

$e_I = e_{123}$ si $|I| = 3$ ó $I \in \{123\}$

$e_I = 1$ si $|I| = 0$ ó $I = \emptyset$

Es importante tener en cuenta que cuando se escribe $I \in \{12, 13, 23\}$ significa que toma el orden del multi-indice $I \equiv 12$ (multi-indice 1,2) y no el valor de doce (I = 12). De igual forma todos los demas casos.

1.2. El subespacio vectorial de los k - vectores

Definición 1.2.1.

$$\langle AG(3) \rangle_k := \{M \in AG(3); M = \sum_{|I|=k} a_I e_I\}\ ,\ \ k = 0, 1, 2, 3$$

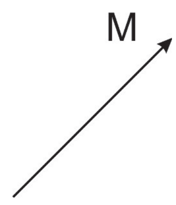
es llamado el subespacio de los k - vectores

Observación 2. .

1. *$M \in \langle AG(3)\rangle_1 \cong \mathbb{R}^3$ será llamado simplemente **vector** y se escribe*

   $$M = \sum_{|I|=1} a_I e_I = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \equiv (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$$

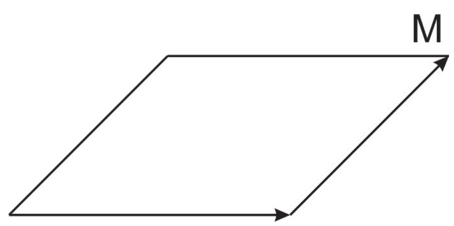
   Geometricamente se representa por un segmento de recta orientado(ó flecha).

2. *$M \in \langle AG(3)\rangle_2$ será llamado simplemente **bivector** y se escribe*

   $$M = \sum_{|I|=2} a_I e_I = a_{12}e_1e_2 + a_{13}e_1e_3 + a_{23}e_2e_3 \equiv a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23}$$

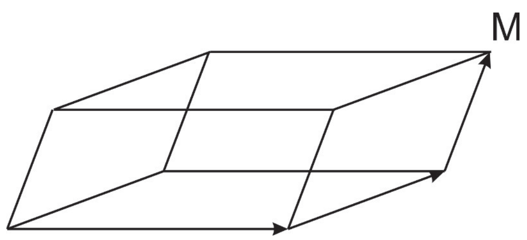
   Geometricamente se representa por un segmento de plano orientado

3. *$M \in \langle AG(3)\rangle_3$ será llamado simplemente **trivector** y se escribe*

   $$M = \sum_{|I|=3} a_I e_I = a_{123}e_1e_2e_3 \equiv a_{123}e_{123}$$

   Geometricamente se representa por un segmento de paralelepipedo oblicuo orientado

4. *$M \in \langle AG(3)\rangle_0 \cong \mathbb{R}$ será llamado simplemente **escalar** y se escribe*

   $$M = \sum_{|I|=0} a_I e_I = a_0$$

   No tiene una representación geométrica.

5. *Es facil verificar que $\langle AG(3)\rangle_k$ es un subespacio vectorial de AG(3) para todo k = 0,1,2,3*

Ejemplo 1.2.2. .

$7e_1 + 5e_2 - 4e_3 \in \langle AG(3)\rangle_1 \cong \mathbb{R}^3$

$2e_1e_2 + 11e_1e_3 + e_2e_3 \in \langle AG(3)\rangle_2$

$8e_1e_2e_3 \in \langle AG(3)\rangle_3 \cong \mathbb{R}i$

$25 \in \langle AG(3)\rangle_0 \cong \mathbb{R}$

$4e_1 + 5e_3 - 10e_2e_3 \in AG(3)$ *es una suma entre un vector y un bivector, esta tiene sentido en el contexto de AG(3).*

Definición 1.2.3.

$$Dado\ \ M = \sum_{k=0}^{3} \sum_{|I|=k} a_I e_I \in AG(3).$$

$$\langle M\rangle_k = \sum_{|I|=k} a_I e_I \in \langle AG(3)\rangle_k \ \ es\ \ llamado\ \ la\ \ parte\ \ k - vectorial\ \ de\ \ M\ \ ,\ \ k = 0,1,2,3$$

Observación 3. *En las condiciones de la definición anterior*

$$\langle M\rangle_1 = \sum_{|I|=1} a_I e_I = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \in \langle AG(3)\rangle_1$$

*es llamada simplemente **parte vectorial** de M*

$$\langle M\rangle_2 = \sum_{|I|=2} a_I e_I = \sum_{1\le i<j\le 3} a_{ij} e_i e_j = a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23} \in \langle AG(3)\rangle_2$$

*es llamada simplemente **parte bivectorial** de M*

$$\langle M\rangle_3 = \sum_{|I|=3} a_I e_I = a_{123}e_{123} \in \langle AG(3)\rangle_3$$

*es llamada simplemente **parte trivectorial** de M*

$$\langle M\rangle_0 = \sum_{|I|=0} a_I e_I = a_0 \in \langle AG(3)\rangle_0$$

es llamado simplemente ***parte escalar*** *de M.*

Es inmediato que M se escribe, de forma única,

$$M = \sum_{k=0}^{3} \sum_{|I|=k} a_I e_I = \sum_{|I|=0} a_I e_I + \sum_{|I|=1} a_I e_I + \sum_{|I|=2} a_I e_I + \sum_{|I|=3} a_I e_I$$

$$= a_0 \ + \ \sum_{i=1}^{3} a_i e_i \ + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} a_{ij} e_i e_j \ + \ a_{123} e_1 e_2 e_3$$

$$= \langle M \rangle_0 + \langle M \rangle_1 + + \langle M \rangle_2 + \langle M \rangle_3$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \langle M \rangle_k$$

es decir

$$AG(3) = \langle AG(3) \rangle_0 \oplus \langle AG(3) \rangle_1 \oplus \langle AG(3) \rangle_2 \oplus \langle AG(3) \rangle_3$$

Ejemplo 1.2.4. .

Sea $M = 7 + 3e_1 - 8e_3 + 6e_{13} + 5e_{23} + e_{12} + 11e_{123}$*, entonces*

$\langle M \rangle_0 = 7$

$\langle M \rangle_1 = 3e_1 - 8e_3$

$\langle M \rangle_2 = 6e_{13} + 5e_{23} + e_{12}$

$\langle M \rangle_3 = 11e_{123}$

Es importrante precisar que $\langle \quad \rangle_k$ determina un operador proyeccción

Definición 1.2.5. *El operador extractor de grado k es la aplicación*

$$\langle \quad \rangle_k : M = \sum_{k=0}^{3} \sum_{|I|=k} a_I e_I \in AG(3) \longmapsto \langle M \rangle_k = \sum_{|I|=k} a_I e_I \in \langle AG(3) \rangle_k$$

Observación 4.

$$M \in \langle AG(3) \rangle_0 \ si \ y \ solo \ si \ M = \sum_{|I|=0} a_I e_I = a_0$$

$$M \in \langle AG(3) \rangle_1 \ si \ y \ solo \ si \ M = \sum_{|I|=1} a_I e_I = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$M \in \langle AG(3) \rangle_2 \ si \ y \ solo \ si \ M = \sum_{|I|=2} a_I e_I = a_{12} e_1 e_2 + a_{13} e_1 e_3 + a_{23} e_2 e_3$$

$$M \in \langle AG(3) \rangle_3 \ si \ y \ solo \ si \ M = \sum_{|I|=3} a_I e_I = a_{123} e_1 e_2 e_2$$

1.3. Subespacios y subálgebras de AG(3)

En la sección anterior se observó que $\langle AG(3)\rangle_k$ es un subespacio vectorial de AG(3), para todo k = 0,1,2,3. Algunos de ellos resultan isomorfos a espacios conocidos

$\langle AG(3)\rangle_0 \cong \mathbb{R}$

$\langle AG(3)\rangle_1 \cong \mathbb{R}^3$

$\langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_2 \cong \mathbb{H}\ (El\ algebra\ de\ los\ cuaterniones)$

En efecto, basta considerar las siguientes identificaciones

$1 \in \langle AG(3)\rangle_0 \longleftrightarrow 1 \in \mathbb{R}$

$e_1 \in \langle AG(3)\rangle_1 \longleftrightarrow (1,0,0) \in \mathbb{R}^3$

$e_2 \in \langle AG(3)\rangle_1 \longleftrightarrow (0,1,0) \in \mathbb{R}^3$

$e_3 \in \langle AG(3)\rangle_1 \longleftrightarrow (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$

$e_1e_2 \in \langle AG(3)\rangle_0 \bigoplus \langle AG(3)\rangle_2 \longleftrightarrow i \in \mathbb{H}$

$e_3e_1 \in \langle AG(3)\rangle_0 \bigoplus \langle AG(3)\rangle_2 \longleftrightarrow j \in \mathbb{H}$

$e_2e_3 \in \langle AG(3)\rangle_0 \bigoplus \langle AG(3)\rangle_2 \longleftrightarrow k \in \mathbb{H}$

esto ultimo porque
$e_{12}^2 = e_{31}^2 = e_{23}^2 = -1$
Ademas $\langle AG(3)\rangle_0 \bigoplus \langle AG(3)\rangle_2$ resulta una subálgebra asociativa de AG(3) llamada **subálgebra par** de AG(3) y denotada

$AG^+(3) = \langle AG(3)\rangle_0 \bigoplus \langle AG(3)\rangle_2$

$AG^-(3) = \langle AG(3)\rangle_1 \bigoplus \langle AG(3)\rangle_3$ es llamado subespacio impar de AG(3)

En resumen, se tiene los isomorfismos de espacios vectoriales

$AG(3) \cong \mathbb{R}^3 \bigoplus \mathbb{H} \oplus (\mathbb{R}e_{123})$ y

$AG(3) \cong AG^-(3) \bigoplus AG^+(3)$

1.4. Producto exterior, interior , escalar y vectorial

A partir del producto geométrico se obtienen otros tipos de productos: el producto exterior, util para reescribir las formas diferenciales, el producto interior y el producto vectorial que en el contexto del algebra geometrica mejora el producto vectorial dado por Gibbs utilizado en el álgebra vectorial $\mathbb{R}^3$

Definición 1.4.1. *Sean* $P \in \langle AG(3)\rangle_j$ *y* $M \in \langle AG(3)\rangle_k$ *para todo* $j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$

1. *El* ***producto exterior*** *de P y M es el multivector* $P \uparrow M \in \langle AG(3)\rangle_{j+k}$ *definido por*

$$P \uparrow M := \begin{cases} \langle PM\rangle_{j+k} & ; si \;\; j + k \leq 3 \\ \\ 0 & ; si \;\; j + k > 3 \end{cases}$$

2. *El* ***producto interior*** *de P y M es el multivector* $P \downarrow M \in \langle AG(3)\rangle_{|j-k|}$ *definido por*

$$P \downarrow M := \begin{cases} \langle PM\rangle_{|j-k|} & ; si \;\; j \neq 0 \;\; y \;\; k \neq 0 \\ \\ 0 & ; si \;\; j = 0 \;\; o \;\; k = 0 \end{cases}$$

3. *El* ***producto escalar*** *de P y M es el escalar* $P \cdot M \in \langle AG(3)\rangle_0$ *definido por*

$$P \cdot M := \langle PM\rangle_0 \quad solo\ si\ j = k$$

4. *El* ***producto vectorial*** *de los vectores P , M* $\in \langle AG(3)\rangle_1$ *es el vector* $P \times M \in \langle AG(3)\rangle_1$ *definido por*

$$P \times M := -(P \uparrow M)e_{123}$$

   con P *y* $M \in \langle AG(3)\rangle_1$

Observación 5. .

1. *El producto escalar coincide con el producto interior cuando j = k , para j≠ 0 y k≠ 0*

   Esto no es verdad cuando j = 0 ó k = 0 porque $2 \downarrow 3 = 0$ *, mientras que* $2 \cdot 3 = 6$

2. *La definición de producto vectorial dada arriba mejora aquella dada por Gibbs.*

Cuando uno de los factores es un vector se tiene algunas identidades utiles

Teorema 1.4.2. *Si* $P \in \langle AG(3)\rangle_1$ *y* $M \in \langle AG(3)\rangle_k$ *con k = 0,1,2,3, entonces*

1. $P \uparrow M = \frac{1}{2}[PM + (-1)^k MP]$

2. $P \downarrow M = \frac{1}{2}[PM - (-1)^k MP]$

3. $PM = P \downarrow M + P \uparrow M$

Demostración.

$$P = \sum_{|J|=1} b_J e_J = \sum_{j=1}^{3} b_j e_j$$

$$M = \sum_{|I|=k} a_I e_I$$

$$PM = \sum_{|I|=k;|J|=1} b_J a_I e_J e_I = \sum_{J\cap I\neq\emptyset} b_J a_I e_J e_I + \sum_{J\cap I=\emptyset} b_J a_I e_J e_I$$

$$MP = \sum_{|I|=k;|J|=1} a_I b_J e_I e_J = \sum_{J\cap I\neq\emptyset} a_I b_J e_I e_J + \sum_{J\cap I=\emptyset} a_I b_J e_I e_J$$

$$= (-1)^{k-1} \sum_{J\cap I\neq\emptyset} b_J a_I e_J e_I + (-1)^k \sum_{J\cap I=\emptyset} b_J a_I e_J e_I$$

1. **<u>Para k <3</u>**:

   Por definicion

   $$P \uparrow M = \langle PM\rangle_{k+1} = \sum_{J\cap I=\emptyset} b_J a_I e_J e_I$$

   $$\frac{1}{2}[PM+(-1)^k MP] = \frac{1}{2}[\sum_{J\cap I\neq\emptyset} b_J a_I e_J e_I + \sum_{J\cap I=\emptyset} b_J a_I e_J e_I$$
   $$+ \ (-1)^k\{(-1)^{k-1} \sum_{J\cap I\neq\emptyset} b_J a_I e_J e_I \ + \ (-1)^k \sum_{J\cap I=\emptyset} b_J a_I e_J e_I\}]$$
   $$= \frac{1}{2}[\sum_{J\cap I\neq\emptyset} b_J a_I e_J e_I + \sum_{J\cap I=\emptyset} b_J a_I e_J e_I$$
   $$+ \ (-1)^{2k-1} \sum_{J\cap I\neq\emptyset} b_J a_I e_J e_I \ + \ (-1)^{2k} \sum_{J\cap I=\emptyset} b_J a_I e_J e_I]$$
   $$= \frac{1}{2}[\sum_{J\cap I\neq\emptyset} b_J a_I e_J e_I + \sum_{J\cap I=\emptyset} b_J a_I e_J e_I - \sum_{J\cap I\neq\emptyset} b_J a_I e_J e_I \ + \ \sum_{J\cap I=\emptyset} b_J a_I e_J e_I]$$
   $$= \frac{1}{2}[2\sum_{J\cap I=\emptyset} b_J a_I e_J e_I] = \sum_{J\cap I=\emptyset} b_J a_I e_J e_I$$

   por lo tanto

   $$P \uparrow M = \frac{1}{2}[PM+(-1)^k MP]$$

   para todo k = 0,1,2

   <u>Para k = 3</u>:

   Por definicion

   $$P \uparrow M = 0$$

M es un trivector y como P es un vector entonces $PM = MP$

$$\frac{1}{2}[PM+(-1)^3MP] = \frac{1}{2}[PM-MP] = \frac{1}{2}[PM-PM] = 0$$

por lo tanto

$$P \uparrow M = \frac{1}{2}[PM+(-1)^k MP]$$

para todo k = 0,1,2,3

2. **Para 0 <k**:

   Por definicion

$$P \downarrow M = \langle PM \rangle_{|k-1|} = \langle PM \rangle_{k-1} = \sum_{J\cap I \neq \emptyset} b_J a_I e_J e_I$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[PM-(-1)^k MP] &= \frac{1}{2}[\sum_{J\cap I\neq\emptyset} b_J a_I e_J e_I + \sum_{J\cap I=\emptyset} b_J a_I e_J e_I \\
&\quad + \; -(-1)^k\{(-1)^{k-1}\sum_{J\cap I\neq\emptyset} b_J a_I e_J e_I \; + \; (-1)^k \sum_{J\cap I=\emptyset} b_J a_I e_J e_I\}] \\
&= \frac{1}{2}[\sum_{J\cap I\neq\emptyset} b_J a_I e_J e_I + \sum_{J\cap I=\emptyset} b_J a_I e_J e_I \\
&\quad + \; -(-1)^{2k-1}\sum_{J\cap I\neq\emptyset} b_J a_I e_J e_I \; + \; -(-1)^{2k} \sum_{J\cap I=\emptyset} b_J a_I e_J e_I] \\
&= \frac{1}{2}[\sum_{J\cap I\neq\emptyset} b_J a_I e_J e_I + \sum_{J\cap I=\emptyset} b_J a_I e_J e_I + \sum_{J\cap I\neq\emptyset} b_J a_I e_J e_I \; - \; \sum_{J\cap I=\emptyset} b_J a_I e_J e_I] \\
&= \frac{1}{2}[2\sum_{J\cap I\neq\emptyset} b_J a_I e_J e_I] = \sum_{J\cap I\neq\emptyset} b_J a_I e_J e_I
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$P \downarrow M = \frac{1}{2}[PM-(-1)^k MP]$$

para todo k = 1,2,3

Para k = 0:

Por definicion

$$P \downarrow M = 0$$

M es un escalar entonces $PM = MP$

$$\frac{1}{2}[PM-(-1)^0 MP] = \frac{1}{2}[PM-MP] = 0$$

por lo tanto

$P \downarrow M = \frac{1}{2}[PM - (-1)^k MP]$

para todo k = 0,1,2,3

3. Es la suma de 1 y 2

■

Proposición 1.4.3. *Si* $P \in \langle AG(3) \rangle_1$ *y* $M \in \langle AG(3) \rangle_k$ *entonces*

1. $(P \uparrow M)e_{123} = P \downarrow (Me_{123})$

2. $(P \downarrow M)e_{123} = P \uparrow (Me_{123})$

Demostración. .

De la asociatividad del producto geometrico

$PMe_{123} = P(Me_{123}) = (PM)e_{123}$ ...... (1)

$P(Me_{123}) = P \downarrow (Me_{123}) + P \uparrow (Me_{123})$ ...... (2)

$(PM)e_{123} = (P \downarrow M + P \uparrow M)e_{123} = (P \downarrow M)e_{123} + (P \uparrow M)e_{123}$ ...... (3)

Para k = 3:

En (2)

$P \downarrow (Me_{123}) = 0$

$P \uparrow (Me_{123})$ es de grado 1

En (3)

$(P \downarrow M)e_{123}$ es de grado 1

$(P \uparrow M)e_{123} = 0$

y en (1) por igualdad de multivectores

$(P \uparrow M)e_{123} = P \downarrow (Me_{123})$

$(P \downarrow M)e_{123} = P \uparrow (Me_{123})$

Para 0 <k <3:

En (2)

$P \downarrow (Me_{123})$ es de grado 2 - k

$P \uparrow (Me_{123})$ es de grado 4 - k

En (3)

$(P \downarrow M)e_{123}$ es de grado 4 - k

$(P \uparrow M)e_{123}$ es de grado 2 - k y en (1) por igualdad de multivectores

$(P \uparrow M)e_{123} = P \downarrow (Me_{123})$

$(P \downarrow M)e_{123} = P \uparrow (Me_{123})$

<u>**Para k = 0**</u>:

En (2)

$P \downarrow (Me_{123})$ es de grado 2

$P \uparrow (Me_{123}) = 0$

En (3)

$(P \downarrow M)e_{123} = 0$

$(P \uparrow M)e_{123}$ es de grado 2

y en (1) por igualdad de multivectores

$(P \uparrow M)e_{123} = P \downarrow (Me_{123})$

$(P \downarrow M)e_{123} = P \uparrow (Me_{123})$

■

Capítulo 2

Cálculo en AG(3)

2.1. Funciones multivectoriales

Definición 2.1.1. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ e I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$*

1. *$C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}]$ denota las funciones de clase C^1 definidas en $\Omega \times I \subset \mathbb{R}^4$ y con valores en $\mathbb{R}$.*

2. *$C^1[\Omega \times I; AG(3)]$ denota las llamadas* ***funciones multivectoriales*** *en AG(3).*

$$M = \sum_{k=0}^{3} \sum_{|I|=k} f_I e_I \in C^1[\Omega \times I; AG(3)] \quad \textit{con} \quad f_I \in C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}]$$

   donde

$$M(\boldsymbol{x}, t) = f_0(\boldsymbol{x}, t) + \sum_{i=1}^{3} f_i(\boldsymbol{x}, t) e_i + \sum_{1 \le i < j \le 3} f_{ij}(\boldsymbol{x}, t) e_i e_j + f_{123}(\boldsymbol{x}, t) e_1 e_2 e_3 \in AG(3)$$

   con $\quad f_0, f_i, f_{ij}, f_{123} \in C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}] \quad$ *y* $\quad (\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times I.$

Observación 6. .

1. *$C^1[\Omega \times I; AG(3)]$ son funciones de clase C^1 definidas en $\Omega \times I \subset \mathbb{R}^4$ y con valores en AG(3).*

2. *La variable $\boldsymbol{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ denota la terna de variables espaciales $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ y $t \in I \subset \mathbb{R}$ denota la variable temporal. En este sentido se escribe*

$$(\boldsymbol{x}, t) = (x, y, z, t)$$

Definición 2.1.2. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ e I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$*

$C^1[\Omega \times I; \langle AG(3) \rangle_k]$ denota a las llamadas ***funciones*** *k_-* ***vectoriales*** *en AG(3), con k = 0,1,2,3*

$$M = \sum_{|I|=k} f_I e_I \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3) \rangle_k] \;\; \textit{con} \;\; f_I \in C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}]$$

Observación 7. .

1. *$C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_k]$ son funciones de clase C^1 definidas en $\Omega \times I \subset \mathbb{R}^4$ y con valores en $\langle AG(3)\rangle_k$, con k = 0,1,2,3.*

2. *$C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_k] \subset C^1[\Omega \times I; AG(3)]$*

3. *Si k=1, M $\in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_1] \equiv C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}^3]$ será llamada simplemente **función vectorial** en AG(3), para este caso*

$$\begin{aligned} M &= \sum_{|I|=1} f_I e_I \\ &= f_1e_1 + f_2e_2 + f_3e_3 \equiv (f_1, f_2, f_3) \end{aligned}$$

4. *Si k=2, M $\in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_2]$ será llamada simplemente **función bivectorial** en AG(3), para este caso*

$$\begin{aligned} M &= \sum_{|I|=2} f_I e_I \\ &= f_{12}e_1e_2 + f_{13}e_1e_3 + f_{23}e_2e_3 \end{aligned}$$

5. *Si k=3, M $\in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_3]$ será llamada simplemente **función trivectorial o pseudoescalar** en AG(3), para este caso*

$$M = \sum_{|I|=3} f_I e_I = f_{123}e_1e_2e_3$$

6. *Si k=0, M $\in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_0]$ será llamada simplemente **función escalar** en AG(3), para este caso*

$$M = \sum_{|I|=0} f_I e_I = f_0 \in C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}]$$

Ejemplo 2.1.3. *Para Ω e I apropiados*

1. *Si $M(x, y, z, t) = 7x^2ye_1 + zye_2 + (x + z + t)e_3$, entonces*

   M $\in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_1]$

2. *Si $N(x, y, z, t) = (y^2 + x^2 + z^2 + t^2)e_1e_2 + (xz + yt)e_1e_3 + (x\sqrt{t^2 + z^2})e_2e_3$, entonces*

   N $\in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_2]$

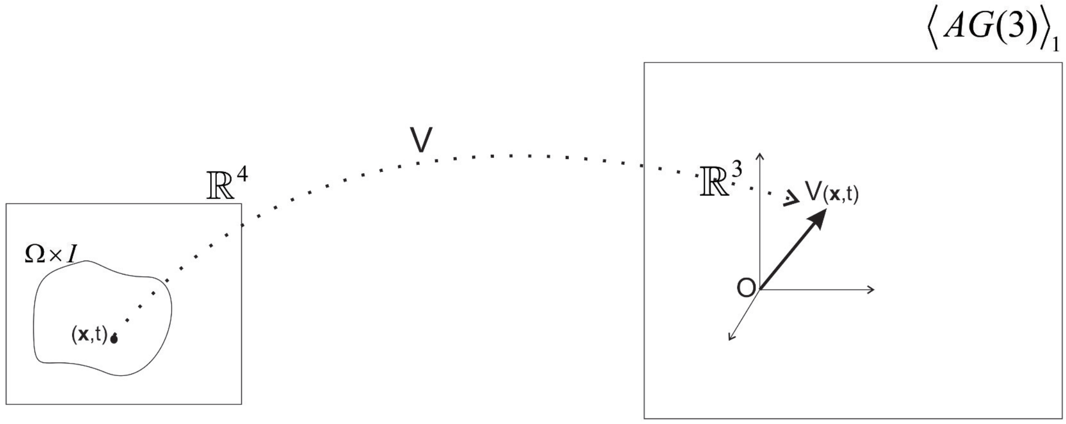
3. *Si $T(x, y, z, t) = (xy + xz + t^3)e_1e_2e_3$, entonces*

   T $\in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_3]$

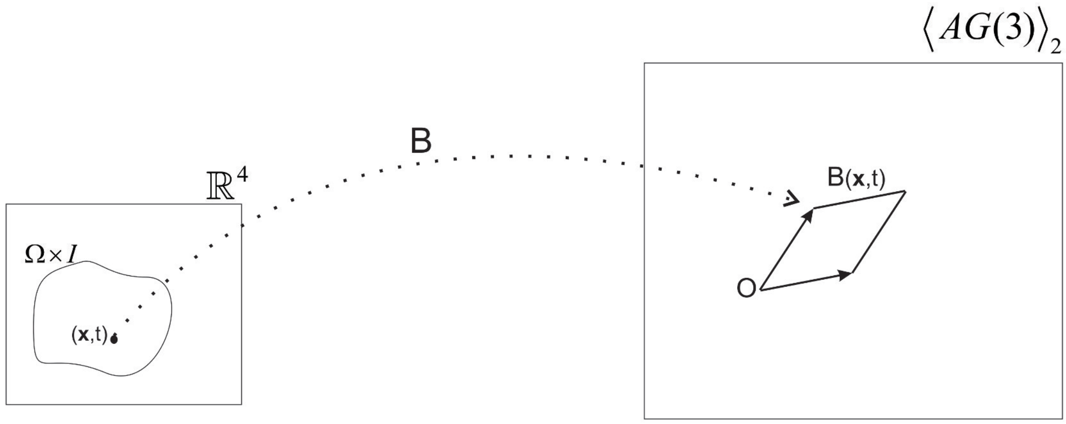
4. *Si $R(x, y, z, t) = xyz + y + \mid y + z \mid$, entonces*

   R $\in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_0] \cong C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}]$

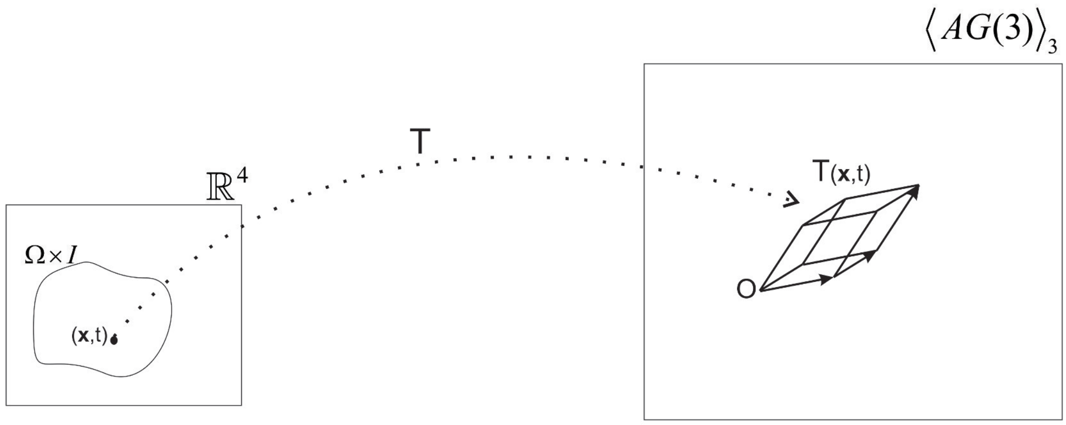
Algunas funciones multivectoriales pueden interpretarse geometricamente



V: Funcion vectorial



B: Función bivectorial



T: Funcion trivectorial

Observación 8. .

1. *En todos los graficos anteriores, se privilegia al origen de coordenadas: O como punto de partida (punto de aplicacion), esto sin embartgo no es necesariamente, pudiendo ser cualquier otro punto. Para aplicaciones fisicas, dicho punto de aplicacion es generalmente el punto* $\boldsymbol{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$*. Esto se detalla en el capitulo 5.*

2. *A diferencia del calculo tradicional donde el ambiente mas grande es* $\mathbb{R}^3$*, aqui el nuevo ambiente es AG(3) , el cual contiene a* $\mathbb{R}^3$ *como subespacio. Este cambio de ambiente y de terminologia hace que los calculos se simplifiquen.*

3. *Para simplificar los cálculos, las funciones multivectoriales se escribiran:*

$$M = \sum_{r=0}^{3} \sum_{|I|=r} f_I e_I$$

$$= f_0 \ + \ \sum_{i=1}^{3} f_i e_i \ + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} f_{ij} e_i e_j \ + \ f_{123} e_1 e_2 e_3$$

   (Al suprimir las variables $(\boldsymbol{x}, t)$ *no provocara cambios en los resultados posteriores)*

4. *En adelante se considerara al conjunto* $\Omega \times I \subset \mathbb{R}^4$ *con las caracteristicas mencionadas en la anterior definicion, es decir, con* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *y* $I \subset \mathbb{R}$ *tal que las funciones sean continuas y sus derivadas parciales espaciales y temporal tambien lo sean en dichos conjuntos.*

Definición 2.1.4.

$$Dados \ \ M = \sum_{k=0}^{3} \sum_{|I|=k} f_I e_I \ \ , \ \ P = \sum_{k=0}^{3} \sum_{|I|=k} g_I e_I \in C^1[\Omega \times I; AG(3)] \quad , \quad f \in C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}]$$

$s \in AG(3) \ \ y \ \ \alpha \in \mathbb{R}$

1. *La **suma*** $M + P \in C^1[\Omega \times I; AG(3)]$ *se define*

$$(M + P)(\boldsymbol{x}, t) := \sum_{k=0}^{3} \sum_{|I|=k} (f_I + g_I)(\boldsymbol{x}, t) e_I \in AG(3)$$

   $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times I$

2. *Las **multiplicaciones*** $fM, sM, Ms, \alpha M \in C^1[\Omega \times I; AG(3)]$ *se definen*

$$(fM)(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{k=0}^{3} \sum_{|I|=k} f(\boldsymbol{x}, t) f_I(\boldsymbol{x}, t) e_I \in AG(3)$$

$$(sM)(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=0}^{3}\sum_{|I|=k} f_I(\boldsymbol{x},t)se_I \in AG(3)$$

$$(Ms)(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=0}^{3}\sum_{|I|=k} f_I(\boldsymbol{x},t)e_Is \in AG(3)$$

$$(\alpha M)(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=0}^{3}\sum_{|I|=k} \alpha f_I(\boldsymbol{x},t)e_I \in AG(3)$$

$(\boldsymbol{x},t) \in \Omega \times I$

3. *El* ***producto geométrico*** *MP*$\in C^1[\Omega \times I; AG(3)]$ *se define*

$$(MP)(\boldsymbol{x},t) := \sum_{k=0}^{3} \sum_{|I|=k\ ,\ |J|=r} (f_Ig_J)(\boldsymbol{x},t)e_Ie_J \in AG(3)$$

Proposición 2.1.5. $C^1[\Omega \times I; AG(3)]$ *y* $C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_k]$ *son*

1. $\mathbb{R}$*_espacios vectoriales*
2. $C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}]$*_módulos*
3. $AG(3)$*_módulos*

2.2. La derivada geométrica

Definición 2.2.1. .

$$Sea\ \ M = \sum_{k=0}^{3}\sum_{|I|=k} f_Ie_I \in C^1[\Omega \times I; AG(3)]$$

1. $\partial_n M \in C^1[\Omega \times I; AG(3)]$, *llamada* n*_ésima derivada parcial de M en AG(3), se define*

$$(\partial_n M)(\boldsymbol{x},t) := \sum_{k=0}^{3}\sum_{|I|=k} (\partial_n f_I)(\boldsymbol{x},t)e_I \in AG(3)$$

   con n = 1,2,3

   Explicitamente

$$(\partial_n M)(\boldsymbol{x},t) = (\partial_n f_0)(\boldsymbol{x},t) + \sum_{i=1}^{3} (\partial_n f_i)(\boldsymbol{x},t)e_i + \sum_{1\le i<j\le 3} (\partial_n f_{ij})(\boldsymbol{x},t)e_ie_j + (\partial_n f_{123})(\boldsymbol{x},t)e_1e_2e_3$$

   con $f_0, f_i, f_{ij}, f_{123} \in C^1[\Omega \times I; AG(3)]$ *,* $(\boldsymbol{x},t) \in \Omega \times I$*.*

Además

$$\partial_1 = \partial_x$$
$$\partial_2 = \partial_y$$
$$\partial_3 = \partial_z$$

teniendo en cuenta que $(\boldsymbol{x}, t) = (x, y, z, t)$

2. $\nabla M \in C^1[\Omega \times I; AG(3)]$, *llamada* ***derivada geométrica por izquierda*** *de M en AG(3), se define*

$$\nabla M(\boldsymbol{x}, t) := \sum_{n=1}^{3} e_n(\partial_n M)(\boldsymbol{x}, t)$$

3. $M\nabla \in C^1[\Omega \times I; AG(3)]$, *llamada* ***derivada geométrica por derecha*** *de M en AG(3), se define*

$$M\nabla(\boldsymbol{x}, t) := \sum_{n=1}^{3} (\partial_n M)(\boldsymbol{x}, t) e_n$$

Notación 2.2.2. *Se escribira*

$$(\partial_n M) = \sum_{k=0}^{3} \sum_{|I|=k} (\partial_n f_I) e_I$$

$$\nabla M = \sum_{n=1}^{3} e_n(\partial_n M)$$

$$M\nabla = \sum_{n=1}^{3} (\partial_n M) e_n$$

Observación 9. .

1. ∇ *es llamado operador derivada geometrica y puede considerarse como un operador definido en* $C^1[\Omega \times I; AG(3)]$ *y con valor en* $C^1[\Omega \times I; AG(3)]$. *Se denota*

$$\nabla = \sum_{n=1}^{3} e_n \partial_n = \sum_{|J|=1} e_J \partial_J$$

2. *El cálculo explicito de* ∇M *y* $M\nabla$ *es del siguiente modo*

$$\nabla M = \sum_{n=1}^{3} e_n(\partial_n M) = \sum_{|J|=1} e_J(\partial_J M) = \sum_{|J|=1} e_J(\sum_{k=0}^{3} \sum_{|I|=k} \partial_J f_I e_I) = \sum_{|J|=1} \sum_{k=0}^{3} \sum_{|I|=k} \partial_J f_I e_J e_I$$

$$\equiv \sum_{|I|=k;|J|=1} \partial_J f_I e_J e_I \equiv \sum_{J \cap I \neq \emptyset} \partial_J f_I e_J e_I + \sum_{J \cap I = \emptyset} \partial_J f_I e_J e_I$$

$$M\nabla = \sum_{n=1}^{3} (\partial_n M) e_n = \sum_{|J|=1} (\partial_J M) e_J = \sum_{|J|=1} (\sum_{k=0}^{3} \sum_{|I|=k} \partial_J f_I e_I) e_J = \sum_{|J|=1} \sum_{k=0}^{3} \sum_{|I|=k} \partial_J f_I e_J e_I e_J$$

$$\equiv \sum_{|I|=k;|J|=1} \partial_J f_I e_I e_J \equiv \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_I e_J + \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_I e_J$$

$$= (-1)^{k-1} \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I + (-1)^k \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I$$

Definición 2.2.3. *. Sea $M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_k]$ con k = 0,1,2,3*

1. *$\nabla \uparrow M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_{k+1}]$, llamada **derivada exterior** de M en AG(3), se define*

$$(\nabla \uparrow M)(\boldsymbol{x}, t) := \begin{cases} \langle \nabla M(\boldsymbol{x}, t)\rangle_{k+1} & ; si\ \ k < 3 \\ \\ 0 & ; si\ \ k = 3 \end{cases}$$

2. *$\nabla \downarrow M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_{k-1}]$, llamada **derivada interior** de M en AG(3), se define*

$$(\nabla \downarrow M)(\boldsymbol{x}, t) := \begin{cases} \langle \nabla M(\boldsymbol{x}, t)\rangle_{k-1} & ; si\ \ k > 0 \\ \\ 0 & ; si\ \ k = 0 \end{cases}$$

Notación 2.2.4. *Se escribira para k <3*

$$\nabla \uparrow M = \langle \nabla M\rangle_{k+1}$$

y para k >0

$$\nabla \downarrow M = \langle \nabla M\rangle_{k-1}$$

Observación 10. *De la observación anterior*

1. *Para k <3*

$$\nabla \uparrow M = \langle \nabla M\rangle_{k+1} = \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I$$

2. *Para k >0*

$$\nabla \downarrow M = \langle \nabla M\rangle_{k-1} = \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I$$

Teorema 2.2.5. *Sea $M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_k]$ con k = 0,1,2,3, entonces*

1. $\nabla \uparrow M = \dfrac{1}{2}[\nabla M + (-1)^k M\nabla]$

2. $\nabla \downarrow M = \dfrac{1}{2}[\nabla M - (-1)^k M\nabla]$

3. $\nabla M = \nabla \downarrow M + \nabla \uparrow M$

Demostración.

$$M = \sum_{|I|=k} f_I e_I \quad f_I \in C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}]$$

$$\nabla = \sum_{|J|=1} \partial_J e_J = \sum_{j=1}^{3} \partial_j e_j$$

$$\nabla M = \sum_{|I|=k;|J|=1} \partial_J f_I e_J e_I = \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I + \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I$$

$$M\nabla = \sum_{|I|=k;|J|=1} \partial_J f_I e_I e_J = \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_I e_J + \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_I e_J$$

$$= (-1)^{k-1} \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I + (-1)^k \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I$$

1. Para k <3

$$\nabla \uparrow M = \langle \nabla M \rangle_{k+1} = \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I$$

$$\frac{1}{2}[\nabla M + (-1)^k M\nabla] = \frac{1}{2}[\sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I + \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I$$

$$+ \ (-1)^k\{(-1)^{k-1} \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I + (-1)^k \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I\}]$$

$$= \frac{1}{2}[\sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I + \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I$$

$$+ \ (-1)^{2k-1} \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I \ + \ (-1)^{2k} \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I]$$

$$= \frac{1}{2}[\sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I + \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I - \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I$$

$$+ \ \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I]$$

$$= \frac{1}{2}[2 \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I] = \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I$$

$$= \langle \nabla M \rangle_{k+1} = \nabla \uparrow M$$

Para k = 3

$$\nabla M = \sum_{|J|=1} e_J (\sum_{|I|=3} \partial_J f_I e_I) = \sum_{|J|=1} \sum_{|I|=3} \partial_J f_I e_J e_I$$

$$M\nabla = \sum_{|J|=1} (\sum_{|I|=3} \partial_J f_I e_I) e_J = \sum_{|J|=1} \sum_{|I|=3} \partial_J f_I e_I e_J = \sum_{|J|=1} \sum_{|I|=3} \partial_J f_I e_J e_I$$

$$\frac{1}{2}[\nabla M + (-1)^3 M\nabla] = \frac{1}{2}[\nabla M - M\nabla] = \nabla \uparrow M$$

2. Para 0 <k

$$\nabla \downarrow M = \langle \nabla M \rangle_{k-1} = \sum_{J\cap I \neq \emptyset} \partial_J f_I e_J e_I$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[\nabla M - (-1)^k M\nabla] &= \frac{1}{2}[\sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I + \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I \\
&+ \ -(-1)^k\{(-1)^{k-1} \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I \ + \ (-1)^k \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I\}] \\
&= \frac{1}{2}[\sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I + \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I \\
&+ \ -(-1)^{2k-1} \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I \ + \ -(-1)^{2k} \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I] \\
&= \frac{1}{2}[\sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I + \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I + \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I \\
&- \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I] \\
&= \frac{1}{2}[2\sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I] = \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I = \langle \nabla M \rangle_{k-1} = \nabla \downarrow M
\end{aligned}$$

Para k = 0

Por definición

$$\nabla \downarrow M = 0$$

$$M = f \in C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}]$$

$$\nabla M = \sum_{|J|=1} e_J \partial_J f = \sum_{|J|=1} \partial_J f e_J = M\nabla$$

$$\frac{1}{2}[\nabla M - (-1)^0 M\nabla] = \frac{1}{2}[\nabla M - M\nabla] = 0 = \nabla \downarrow M$$

3. De 1. y 2.

$$\nabla \downarrow M + \nabla \uparrow M = \frac{1}{2}[\nabla M + (-1)^k M\nabla] + \frac{1}{2}[\nabla M - (-1)^k M\nabla] = \nabla M$$

■

Lema 2.2.6. *Sea* $M \in C^1[\Omega \times I; AG(3)]$, *entonces*

1. $(\nabla M)e_{123} = \nabla(Me_{123})$
2. $(M\nabla)e_{123} = (Me_{123})\nabla$

Demostración.

$$(\nabla M)e_{123} = \nabla(Me_{123}) = (\sum_{|J|=1} e_J(\partial_J M))e_{123} = \sum_{|J|=1} e_J(\partial_J Me_{123}) = \nabla(Me_{123})$$

$$\begin{aligned}(M\nabla)e_{123} = \nabla(Me_{123}) = (\sum_{|J|=1} (\partial_J M)e_J)e_{123} &= \sum_{|J|=1} (\partial_J M)e_J e_{123} \\ = \sum_{|J|=1} (\partial_J M)e_{123}e_J = \sum_{|J|=1} (\partial_J Me_{123})e_J &= (Me_{123})\nabla\end{aligned}$$

■

Proposición 2.2.7. *Sea* $M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_k]$ *con k = 0,1,2,3, entonces*

1. $(\nabla \uparrow M)e_{123} = \nabla \downarrow (Me_{123})$
2. $(\nabla \downarrow M)e_{123} = \nabla \uparrow (Me_{123})$

Demostración. .

Del lema anterior

$(\nabla M)e_{123} = \nabla(Me_{123})$

$(M\nabla)e_{123} = (Me_{123})\nabla$

$$\begin{aligned}\nabla \downarrow (Me_{123}) &= \frac{1}{2}[\nabla(Me_{123}) - (-1)^{3-k}(Me_{123})\nabla] \\ &= \frac{1}{2}[\nabla(Me_{123}) + (-1)^{k}(Me_{123})\nabla] \\ &= \{\frac{1}{2}[\nabla M + (-1)^k M\nabla]\}e_{123} \\ &= (\nabla \uparrow M)e_{123}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \uparrow (Me_{123}) &= \frac{1}{2}[\nabla(Me_{123}) + (-1)^{3-k}(Me_{123})\nabla] \\ &= \frac{1}{2}[\nabla(Me_{123}) - (-1)^{k}(Me_{123})\nabla] \\ &= \{\frac{1}{2}[\nabla M - (-1)^k M\nabla]\}e_{123} \\ &= (\nabla \downarrow M)e_{123}\end{aligned}$$

■

Observación 11. .

1. *Sea* $M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_1] \cong C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}^3]$, ∇M *se escribe explicitamente del siguiente modo*

$$M = \sum_{|I|=1} f_I e_I = \sum_{i=1}^{3} f_i e_i$$

$$\begin{aligned}
\nabla M &= \sum_{n=1}^{3} e_n(\partial_n M) = \sum_{n=1}^{3} e_n(\sum_{i=1}^{3}(\partial_n f_i)e_i) = \sum_{n=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}(\partial_n f_i)e_n e_i \\
&= \sum_{n=i}(\partial_n f_i)e_n e_i + \sum_{n\neq i}(\partial_n f_i)e_n e_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}(\partial_i f_i)e_i e_i + \sum_{n<i}(\partial_n f_i)e_n e_i + \sum_{i<n}(\partial_n f_i)e_n e_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}\partial_i f_i + \sum_{n<i}(\partial_n f_i)e_n e_i + \sum_{n<i}(\partial_i f_n)e_i e_n \\
&= \sum_{i=1}^{3}\partial_i f_i + \sum_{n<i}(\partial_n f_i)e_n e_i - \sum_{n<i}(\partial_i f_n)e_n e_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}\partial_i f_i + \sum_{1\leq n<i\leq 3}(\partial_n f_i - \partial_i f_n)e_n e_i
\end{aligned}$$

2. *Sea* $M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_0] \cong C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}]$, *entonces*

$$\nabla M = \nabla \uparrow M \equiv Grad(M)$$

donde Grad(M) denota al ***gradiente*** *de la funcion M*

<u>En efecto</u>:

$M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_0]$ *entonces*

$$M = \sum_{|I|=0} f_I e_I$$

Como $|I| = 0$ *entonces* $e_I \equiv 1$

Luego, $M = f_I \in C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}]$

$$\begin{aligned}
\nabla M &= \sum_{n=1}^{3} e_n(\partial_n M) = \sum_{n=1}^{3} e_n(\partial_n f_I) \\
&= e_1\partial_1 f_I + e_2\partial_2 f_I + e_3\partial_3 f_I \in \langle AG(3)\rangle_1 \cong \mathbb{R}^3 \\
&= Grad(f_I) = Grad(M)
\end{aligned}$$

Por otro lado, por definición

$$\begin{aligned}\nabla \uparrow M &= \langle \nabla M\rangle_{0+1} = \langle \nabla M\rangle_1\\ &= e_1\partial_1 f_I + e_2\partial_2 f_I + e_3\partial_3 f_I\\ &= Grad(M)\end{aligned}$$

3. *Si* $M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_1] \cong C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}^3], \nabla \cdot M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_0] \cong C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}]$ *es llamada* ***derivada escalar*** *de M en AG(3), es el caso particular de la derivada interior cuando k = 1*

$$\nabla \cdot M = \nabla \downarrow M = \langle \nabla M\rangle_0$$

y coincide con la idea de divergencia

$$\nabla \cdot M = Div(M)$$

En efecto*:*

$M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_1]$*, entonces*

$$M = \sum_{|I|=1} f_I e_I = \sum_{i=1}^{3} f_i e_i = f_1e_1 + f_2e_2 + f_3e_3$$

$$\nabla M = \sum_{i=1}^{3} \partial_i f_i + \sum_{1\le n<i\le 3} (\partial_n f_i - \partial_i f_n) e_n e_i$$

y por definicion

$$\nabla \cdot M = \langle \nabla M\rangle_0 = \sum_{i=1}^{3} \partial_i f_i \equiv \partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3 = Div(M)$$

Definición 2.2.8. . *Sea* $M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_1]$*,* $\nabla \times M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_1]$ *llamada* ***derivada vectorial*** *de M en AG(3), se define*

$$(\nabla \times M)(\boldsymbol{x}, t) := -\nabla \uparrow M(\boldsymbol{x}, t) e_{123}$$

Observación 12. .

1. *Se escribira abreviadamente* $\nabla \times M = -(\nabla \uparrow M)e_{123}$
2. *La derivada vectorial coincide con la idea de* ***rotacional*** *de una función vectorial de variable vectorial, es decir , si* $M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_1] \cong C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}^3]$*, entonces*

$$\nabla \times M \equiv Rot(M)$$

En efecto*:*

$$M = \sum_{|I|=1} f_I e_I = \sum_{i=1}^{3} f_i e_i$$

$$\nabla M = \sum_{i=1}^{3} \partial_i f_i + \sum_{1\leq n<i\leq 3} (\partial_n f_i - \partial_i f_n) e_n e_i$$

por definición

$$\begin{aligned}
\nabla \uparrow M = \langle \nabla M \rangle_2 &= \sum_{1\leq n<i\leq 3} (\partial_n f_i - \partial_i f_n) e_n e_i \\
&= (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) e_1 e_2 + (\partial_1 f_3 - \partial_1 f_3) e_1 e_3 + (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) e_2 e_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times M &= -\nabla \uparrow M e_{123} \\
&= -[(\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) e_1 e_2 + (\partial_1 f_3 - \partial_1 f_3) e_1 e_3 + (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) e_2 e_3] e_{123} \\
&= -[(\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) e_1 e_2 e_1 e_2 e_3 + (\partial_1 f_3 - \partial_1 f_3) e_1 e_3 e_1 e_2 e_3 \\
&\quad + (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) e_2 e_3 e_1 e_2 e_3] \\
&= -[-(\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) e_3 + (\partial_1 f_3 - \partial_3 f_1) e_2 - (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) e_1] \\
&= (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) e_1 - (\partial_1 f_3 - \partial_3 f_1) e_2 + (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) e_3 \\
&= (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) e_1 + (\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3) e_2 + (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) e_3 \\
&\equiv (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2; \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3; \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) \\
&= Rot(M)
\end{aligned}$$

2.3. Campos multivectoriales

Definición 2.3.1. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ e I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.*

1. $C^1[\Omega \times I, (\Omega \times I) \times AG(3)]$ *denota las funciones de clase* C^1

$$M : \Omega \times I \longrightarrow (\Omega \times I) \times AG(3)$$

2. $\Gamma[\Omega \times I, AG(3)]$ *denota los llamados* ***campos multivectoriales*** *en AG(3), es decir ;*

   $M \in \Gamma[\Omega \times I, AG(3)]$ *si* $M \in C^1[\Omega \times I, (\Omega \times I) \times AG(3)]$ *y* $\pi \circ M = 1_{\Omega \times I}$

$$\begin{tikzcd}
(\Omega \times I) \times AG(3) \arrow[d, bend right, "\pi"'] \\
\Omega \times I \arrow[u, bend right, "M"']
\end{tikzcd}$$

donde $1_{\Omega \times I} \in C^1[\Omega \times I, \Omega \times I]$ es la aplicación identidad y π es la proyección a la primera componente.

Proposición 2.3.2. $\Gamma[\Omega \times I, AG(3)] = \{(1_{\Omega\times I}; m)/m \in C^1[\Omega \times I, AG(3)]\}$

Demostración. .

Sea $M \in \Gamma[\Omega \times I, AG(3)]$, como

$M = (a; m)$ con $a \in C^1[\Omega \times I, \Omega \times I]$ y $m \in C^1[\Omega \times I, AG(3, 1)]$, se tiene

$$a(\mathbf{x}; t) = \pi(a(\mathbf{x}; t); m(\mathbf{x}; t)) = \pi \circ M(\mathbf{x}; t) = \pi(M(\mathbf{x}; t)) = 1_{\Omega\times I}(\mathbf{x}; t)$$

para todo $(\mathbf{x}; t) \in \Omega \times I$

De esta forma

a = $1_{\Omega\times I}$ y $M = (1_{\Omega\times I}; m)$

■

Definición 2.3.3. *En las condiciones de la definición anterior.*

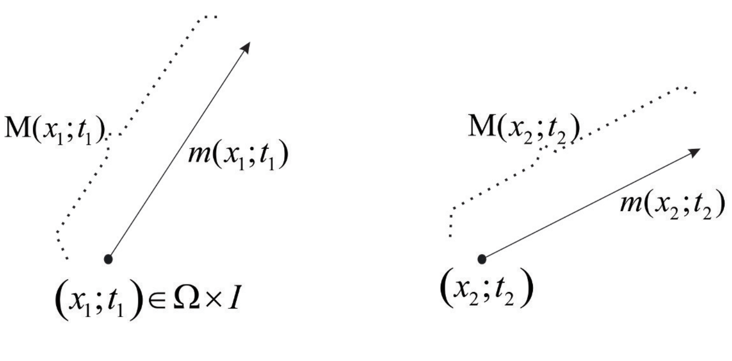
$\Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3)\rangle_k]$ *denota los **campos k - vectoriales** en AG(3) , es decir ;*

$$\Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3)\rangle_k] = \{(1_{\Omega\times I}, m)/m \in C^1[\Omega \times I, \langle AG(3)\rangle_k]\}$$

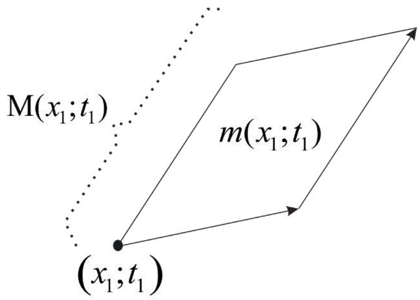
$$\begin{tikzcd} (\Omega\times I)\times\langle AG(3)\rangle_k \arrow[d, bend right, "\pi"'] \\ \Omega\times I \arrow[u, bend right, "M"'] \end{tikzcd}$$

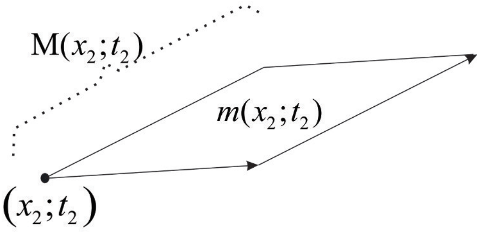
Observación 13. .

1. $\Gamma[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_k] \subset \Gamma[\Omega \times I; AG(3)]$
2. *Si k = 1 , $M \in \Gamma[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_1]$ será llamada simplemente **campo vectorial** en AG(3)*

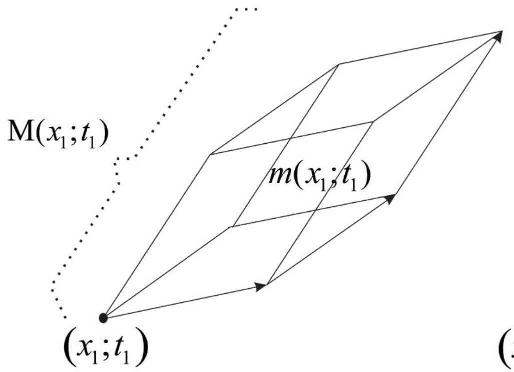


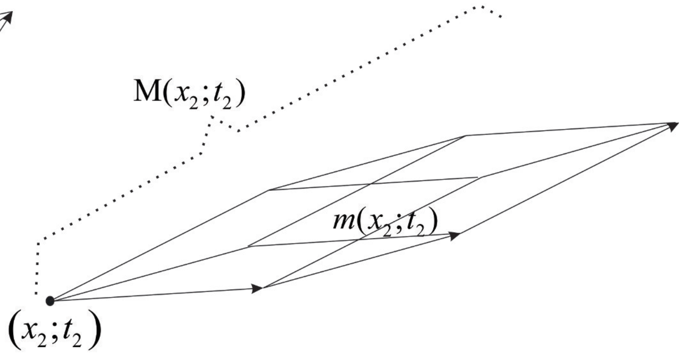
3. *Si k = 2 , $M \in \Gamma[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_2]$ será llamado simplemente* ***campo bivectorial*** *en AG(3)*





4. *Si k = 3 , $M \in \Gamma[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_3]$ será llamado simplemente* ***campo trivectorial*** *ó* ***campo pseudoescalar*** *en AG(3)*





5. *Si k = 0 , $M \in \Gamma[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_0]$ será llamado simplemente* ***campo escalar*** *en AG(3)*

Definición 2.3.4. *Sea $M, P \in \Gamma[\Omega \times I; AG(3)]$ con $M = (1_{\Omega\times I}; m)$ y $P = (1_{\Omega\times I}; p)$; $f \in C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}]$; $s \in AG(3)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$*

1. *$M + P = (1_{\Omega\times I}; m + p) \in \Gamma[\Omega \times I; AG(3)]$, llamado suma de M y P , se define*

   $M{+}P(x, t) = ((x; t); m(x; t){+}p(x; t))$

   para todo $(x; t) \in \Omega \times I$

2. *La multiplicación $fM = (1_{\Omega\times I}; fm), sM = (1_{\Omega\times I}; sm), Ms = (1_{\Omega\times I}; ms), \alpha M = (1_{\Omega\times I}; \alpha m) \in \Gamma[\Omega \times I; AG(3)]$ se definen*

   $fM(x, t) = ((x; t); fm(x; t))$

   $sM(x, t) = ((x; t); sm(x; t))$

   $Ms(x, t) = ((x; t); m(x; t)s)$

   $\alpha M(x, t) = ((x; t); \alpha m(x; t))$

   para todo $(x; t) \in \Omega \times I$

3. $MP = (1_{\Omega\times I}; mp) \in \Gamma[\Omega \times I; AG(3)]$, *llamado producto geométrico de M y P, se define*

   $M{+}P(x,t) = ((x;t); m(x;t)p(x;t))$

   para todo $(x;t) \in \Omega \times I$

Con las operaciones anteriores $\Gamma[\Omega \times I; AG(3)]$ y $C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_k]$ tiene estructura de $\mathbb{R}_$espacio vectorial, $C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}]_$módulo y $AG(3)_$módulo.

Definición 2.3.5. *Sea* $M = (1_{\Omega\times I}; m) \in \Gamma[\Omega \times I; AG(3)]$

1. $\partial_n M = (1_{\Omega\times I}; \partial_n m) \in \Gamma[\Omega \times I; AG(3)]$, *llamada* $n\_$*ésima* ***derivada parcial*** *de M para campos multivectoriales en AG(3), se define*

   $\partial_n M(x,t) := ((x;t); \partial_n m(x;t))$

   para todo $(x;t) \in \Omega \times I$

   Aqui $\partial_n m$ *es la* $n\_$*ésima derivada parcial de m para funciones multivectoriales*

2. $\nabla M = (1_{\Omega\times I}; \triangledown m) \in \Gamma[\Omega \times I; AG(3)]$, *llamada* ***derivada geométrica por izquierda*** *de M para campos multivectoriales en AG(3), se define*

   $\nabla M(x,t) := ((x;t); \triangledown m(x;t))$

   para todo $(x;t) \in \Omega \times I$

   Aqui $\triangledown m$ *es la derivada geométrica por izquierda de m para funciones multivectoriales*

3. $M\nabla = (1_{\Omega\times I}; m\triangledown) \in \Gamma[\Omega \times I; AG(3)]$, *llamada* ***derivada geométrica por derecha*** *de M para campos multivectoriales en AG(3), se define*

   $M\nabla(x,t) := ((x;t); m\triangledown(x;t))$

   para todo $(x;t) \in \Omega \times I$

   Aqui $m\triangledown$ *es la derivada geométrica por derecha de m para funciones multivectoriales*

Definición 2.3.6. *Sea* $M = (1_{\Omega\times I}; m) \in \Gamma[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_k]$ *con k = 0,1,2,3*

1. $\nabla \uparrow M = (1_{\Omega\times I}; \triangledown \uparrow m) \in \Gamma[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_{k+1}]$, *llamada* ***derivada exterior*** *de M para campos multivectoriales en AG(3), se define*

   $\nabla \uparrow M(x,t) := ((x;t); \triangledown \uparrow m(x;t))$

   para todo $(x;t) \in \Omega \times I$

   Aqui $\triangledown \uparrow m$ *es la derivada exterior de m para funciones multivectoriales*

2. $\nabla\downarrow M=(1_{\Omega\times I};\bigtriangledown\downarrow m)\in\Gamma[\Omega\times I;\langle AG(3)\rangle_{|k-1|}]$, *llamada **derivada interior** de M para campos multivectoriales en AG(3), se define*

   $\nabla\downarrow M(x,t):=((x;t);\bigtriangledown\downarrow m(x;t))$

   para todo $(x;t)\in\Omega\times I$

   Aqui $\bigtriangledown\downarrow m$ *es la derivada interior de m para funciones multivectoriales*

Teorema 2.3.7. *Sea* $M=(1_{\Omega\times I};m)\in\Gamma[\Omega\times I;\langle AG(3)\rangle_k]$ *con k = 0,1,2,3, entonces*

1. $\nabla\uparrow M=\dfrac{1}{2}[\nabla M+(-1)^k M\nabla]$
2. $\nabla\downarrow M=\dfrac{1}{2}[\nabla M-(-1)^k M\nabla]$
3. $\nabla M=\nabla\downarrow M+\nabla\uparrow M$

Demostración. $M=(1_{\Omega\times I};m)\in\Gamma[\Omega\times I;\langle AG(3)\rangle_k]$ con $m\in C^1[\Omega\times I;\langle AG(3)\rangle_k]$

1.
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\nabla M+(-1)^k M\nabla]&=\frac{1}{2}\nabla M+\frac{1}{2}(-1)^k M\nabla\\&=(1_{\Omega\times I};\frac{1}{2}\bigtriangledown m)+(1_{\Omega\times I};\frac{1}{2}(-1)^k m\bigtriangledown)\\&=(1_{\Omega\times I};\frac{1}{2}\bigtriangledown m+\frac{1}{2}(-1)^k m\bigtriangledown)\\&=(1_{\Omega\times I};\frac{1}{2}[\bigtriangledown m+(-1)^k m\bigtriangledown])\\&=(1_{\Omega\times I};\bigtriangledown\uparrow m)\\&=\nabla\uparrow M\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\nabla M-(-1)^k M\nabla]&=\frac{1}{2}\nabla M-\frac{1}{2}(-1)^k M\nabla\\&=(1_{\Omega\times I};\frac{1}{2}\bigtriangledown m)+(1_{\Omega\times I};-\frac{1}{2}(-1)^k m\bigtriangledown)\\&=(1_{\Omega\times I};\frac{1}{2}\bigtriangledown m-\frac{1}{2}(-1)^k m\bigtriangledown)\\&=(1_{\Omega\times I};\frac{1}{2}[\bigtriangledown m-(-1)^k m\bigtriangledown])\\&=(1_{\Omega\times I};\bigtriangledown\downarrow m)\\&=\nabla\downarrow M\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\nabla\downarrow M+\nabla\uparrow M &= (1_{\Omega\times I};\triangledown\downarrow m)+(1_{\Omega\times I};\triangledown\uparrow m)\\ &= (1_{\Omega\times I};\triangledown\downarrow m+\triangledown\uparrow m)\\ &= (1_{\Omega\times I};\triangledown m)\\ &= \nabla M\end{aligned}$$

■

Proposición 2.3.8. *Sea* $M=(1_{\Omega\times I};m)\in\Gamma[\Omega\times I;\langle AG(3)\rangle_k]$ *con k = 0,1,2,3, entonces*

1. $(\nabla\uparrow M)e_{123}=\nabla\downarrow(Me_{123})$
2. $(\nabla\downarrow M)e_{123}=\nabla\uparrow(Me_{123})$
3. $\nabla M=\nabla\downarrow M+\nabla\uparrow M$

Demostración. $M=(1_{\Omega\times I};m)$

1.

$$\begin{aligned}(\nabla\uparrow M)e_{123} &= (1_{\Omega\times I};(\triangledown\uparrow m)e_{123})\\ &= (1_{\Omega\times I};\triangledown\downarrow(me_{123}))\\ &= \nabla\downarrow(Me_{123})\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(\nabla\downarrow M)e_{123} &= (1_{\Omega\times I};(\triangledown\downarrow m)e_{123})\\ &= (1_{\Omega\times I};\triangledown\uparrow(me_{123}))\\ &= \nabla\uparrow(Me_{123})\end{aligned}$$

■

Capítulo 3

El álgebra geométrica AG(3,1)

3.1. Álgebra geométrica tetradimensional pseudoeuclideano

Definición 3.1.1. *. Denotando con* $\mathbb{R}[e_1, e_2, e_3, e_4]$ *el anillo de los polinomios con coeficientes reales en las variables* e_1, e_2, e_3, e_4 *.*

*El **álgebra geométrica tetradimensional pseudoeuclideano**, denotada con AG(3,1) , es el subespacio vectorial*

$$AG(3,1) := \{M \in \mathbb{R}[e_1, e_2, e_3, e_4]; M = \sum_{k=0}^{4} \sum_{|I|=k} a_I e_I\}$$

provisto del producto de polinomios modificado por la condición

$$\boxed{e_j e_i + e_i e_j = 2\delta_{ij}}$$

*llamada **condición de Dirac** para todo* $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$

I denota a los multi-indices de longitud $|I| = k$ *,* $0 \leq k \leq 4$
$a_I \in \mathbb{R}$ *y* δ_{ij} *es la función delta de Kronecker definida por:*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \quad si \;\; i = j \;\; con \;\; i \in \{1,2,3\} \\ 0 \quad si \;\; i \neq j \;\; con \;\; i, j \in \{1,2,3\} \\ -1 \quad si \;\; i = j = 4 \end{cases}$$

Se considera a e_1, e_2, e_3, e_4 como variables , en este contexto, pues ello permitira identificarlos con la base de $\mathbb{R}^{3,1}$ llamado **espacio de Minkowski** o **espacio - tiempo** para considerarlo un subespacio vectorial de AG(3,1)

Explicitamente los elementos de AG(3,1) se escriben

$$M = \sum_{k=0}^{4} \sum_{|I|=k} a_I e_I$$

$$= \sum_{|I|=0} a_I e_I + \sum_{|I|=1} a_I e_I + \sum_{|I|=2} a_I e_I + \sum_{|I|=3} a_I e_I + \sum_{|I|=4} a_I e_I$$

$$= a_0 \ + \ \sum_{i=1}^{4} a_i e_i \ + \sum_{1\leq i<j\leq 4} a_{ij} e_i e_j \ + \sum_{1\leq i<j<l\leq 4} a_{ij} e_i e_j e_l \ + \ a_{1234} e_1 e_2 e_3 e_4$$

con $a_0, a_i, a_{ij}, a_{ijl}, a_{1234} \in \mathbb{R}$

En este sentido se puede identificar los elementos

$$\sum_{|I|=0} a_I e_I = a_0$$

$$\sum_{|I|=1} a_I e_I = \sum_{i=1}^{4} a_i e_i$$

$$\sum_{|I|=2} a_I e_I = \sum_{1\leq i<j\leq 4} a_{ij} e_i e_j$$

$$\sum_{|I|=3} a_I e_I = \sum_{1\leq i<j<l\leq 4} a_{ij} e_i e_j e_l$$

$$\sum_{|I|=4} a_I e_I = a_{1234} e_1 e_2 e_3 e_4$$

El producto de polinomios en $\mathbb{R}[e_1, e_2, e_3, e_4]$ modificado por la condición de Dirac es llamado **producto geométrico** en AG(3,1)

Veremos que el producto geométrico le da a AG(3,1) una estructura de álgebra asociativa real de dimension 16 y base

$$\{1 \ , \ e_1, e_2, e_3, e_4 \ , \ e_1e_2, e_1e_3, e_1e_4, e_2e_3, e_2e_4, e_3e_4 \ , \ e_1e_2e_3, e_1e_2e_4, e_1e_3e_4, e_2e_3e_4 \ , \ e_1e_2e_3e_4\}$$

llamados

cero-vector básico: 1

vectores básicose_1, e_2, e_3, e_4

bivectores basicos: $e_1e_2, e_1e_3, e_1e_4, e_2e_3, e_2e_4, e_3e_4$

trivectores básicos: $e_1e_2e_3, e_1e_2e_4, e_1e_3e_4, e_2e_3e_4$

tetravectores básicos o pseudoescalar basico: $e_1e_2e_3e_4$

Los elementos de AG(3,1) son llamados **multivectores** en AG(3,1).

Para abreviar se escribirá

$e_{12} \equiv e_1e_2$, $e_{13} \equiv e_1e_3$, $e_{14} \equiv e_1e_4$, $e_{23} \equiv e_2e_3$, $e_{24} \equiv e_2e_4$, $e_{34} \equiv e_3e_4$

$e_{123} \equiv e_1e_2e_3$, $e_{124} \equiv e_1e_2e_4$, $e_{134} \equiv e_1e_3e_4$, $e_{234} \equiv e_2e_3e_4$

$e_{1234} \equiv e_1e_2e_3e_4$

y por lo tanto escribiremos

$$M = a_0 + \sum_{i=1}^{4} a_i e_i + \sum_{1\leq i<j\leq 4} a_{ij} e_{ij} + \sum_{1\leq i<j<l\leq 4} a_{ijl} e_{ijl} + a_{1234} e_{1234}$$

Teorema 3.1.2. *AG(3,1) con el producto geométrico es un $\mathbb{R}$ - álgebra asociativa de dimensión 16 y base*

$$\{1\ ,\ e_1\ ,\ e_2\ ,\ e_3\ ,\ e_4\ ,\ e_{12}\ ,\ e_{13}\ ,\ e_{14}\ ,\ e_{23}\ ,\ e_{24}\ ,\ e_{34}\ ,\ e_{123}\ ,\ e_{124}\ ,\ e_{134}\ ,\ e_{234}\ ,\ e_{1234}\}$$

Demostración. .

Antes de mostrar que el poducto geométrico es cerrado en AG(3,1), veamos que si

$e_ie_je_ke_l$ $\in$AG(3,1) con $0 \leq i, j, k, l \leq 4$

$e_me_ne_pe_q$ $\in$AG(3,1) con $0 \leq m, n, p, q \leq 4$

entonces

$(e_ie_je_ke_l)(e_me_ne_pe_q) = \pm e_re_se_te_u \in$ AG(3) con $0, r, s, t, u \leq 4$

en efecto

1º caso: Si solo hay 1 indice i $\in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

es decir i = j = k = l = m = n = p = q

$(e_ie_je_ke_l)(e_me_ne_pe_q) = 1 \equiv e_0$

2º caso: Si solo hay 2 indices diferenctes r , s $\in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$(e_ie_je_ke_l)(e_me_ne_pe_q) = \pm e_re_s$

3º caso: Si solo hay 3 indices diferenctes r , s , t $\in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$(e_ie_je_ke_l)(e_me_ne_pe_q) = \pm e_re_se_s$

4º caso: Si hay 4 indices diferenctes r , s , t , u $\in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$(e_ie_je_ke_l)(e_me_ne_pe_q) = \pm e_re_se_se_u$

Genericamente se escribirá

$e_I = e_ie_je_ke_l$ con $|I| \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$e_J = e_me_ne_pe_q$ con $|J| \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$e_L = e_re_se_te_u$ con $|L| \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

y por tanto

$e_Ie_J = e_L$

Sean, ahora M , N $\in$ AG(3,1) con

$$M = \sum_{n=0}^{4} \sum_{|I|=n} a_Ie_I$$

$$N = \sum_{m=0}^{4} \sum_{|J|=m} b_Je_J$$

luego

$$MN = (\sum_{n=0}^{4}\sum_{|I|=n} a_I e_I)(\sum_{m=0}^{4}\sum_{|J|=m} b_J e_J)$$

$$= \sum_{n=0}^{4}(\sum_{|I|=n} a_I e_I)(\sum_{m=0}^{4}\sum_{|J|=m} b_J e_J)$$

$$= \sum_{n=0}^{4}\sum_{m=0}^{4}(\sum_{|I|=n} a_I e_I)(\sum_{|J|=m} b_J e_J)$$

$$= \sum_{n=0}^{4}\sum_{m=0}^{4}\sum_{|I|=n}(a_I e_I)(\sum_{|J|=m} b_J e_J)$$

$$= \sum_{n=0}^{4}\sum_{m=0}^{4}\sum_{|I|=n}\sum_{|J|=m}(a_I e_I)(b_J e_J)$$

$$= \sum_{n=0}^{4}\sum_{m=0}^{4}\sum_{|I|=n}\sum_{|J|=m} a_I b_J e_I e_J$$

$$= \sum_{n=0}^{4}\sum_{m=0}^{4}\sum_{|I|=n}\sum_{|J|=m} a_I b_J e_L \quad \in AG(3,1)$$

por lo tanto el producto geométrico es cerrado en AG(3,1).

AG(3,1) y el producto geométrico heredan la estructura del anillo de polinomios $\mathbb{R}[e_1, e_2, e_3, e_4]$ y producto de polinomios , de esto , para todo M , N , P $\in$ AG(3,1) y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple

(αM)N = M(αN) = α(MN)

(M + N)P = MN + NP

P(M + N) = PM + PN

(MN)P = M(NP)

Todas estas propiedades hacen de AG(3,1) un $\mathbb{R}$ - álgebra asociativa.

Por definición el conjunto $\{1\ ,\ e_1\ ,\ e_2\ ,\ e_3\ ,\ e_4\ ,\ e_{12}\ ,\ e_{13}\ ,\ e_{14}\ ,\ e_{23}\ ,\ e_{24}\ ,\ e_{34}\ ,\ e_{123}\ ,\ e_{124}\ ,\ e_{134}\ ,\ e_{234}\ ,\ e_{1234}\}$ genera AG(3,1)

Ahora se verificará que $\{1\ ,\ e_1\ ,\ e_2\ ,\ e_3\ ,\ e_4\ ,\ e_{12}\ ,\ e_{13}\ ,\ e_{14}\ ,\ e_{23}\ ,\ e_{24}\ ,\ e_{34}\ ,\ e_{123}\ ,\ e_{124}\ ,\ e_{134}\ ,\ e_{234}\ ,\ e_{1234}\}$ es linealmente independiente en AG(3,1).

Sean a_0 , a_i , a_{ij} , a_{ijl} , $a_{1234} \in \mathbb{R}$ tal que

$a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{14}e_{14} + a_{23}e_{23} + a_{24}e_{24}+$

$a_{34}e_{34} + a_{123}e_{123} + a_{124}e_{124} + a_{134}e_{134} + a_{234}e_{234} + a_{1234}e_{1234} = 0$ .... **(I)**

multiplicando (I) por la izquierda y derecha por e_{123}

$e_{123}(a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{14}e_{14} + a_{23}e_{23} + a_{24}e_{24}+$

$a_{34}e_{34} + a_{123}e_{123} + a_{124}e_{124} + a_{134}e_{134} + a_{234}e_{234} + a_{1234}e_{1234})e_{123} = 0$

$e_{123}a_0e_{123} + e_{123}a_1e_1e_{123} + e_{123}a_2e_2e_{123} + e_{123}a_3e_3e_{123} + e_{123}a_4e_4e_{123} + e_{123}a_{12}e_{12}e_{123} +$
$e_{123}a_{13}e_{13}e_{123} + e_{123}a_{14}e_{14}e_{123} + e_{123}a_{23}e_{23}e_{123} + e_{123}a_{24}e_{24}e_{123} + e_{123}a_{34}e_{34}e_{123}+$

$e_{123}a_{123}e_{123}e_{123} + e_{123}a_{124}e_{124}e_{123} + e_{123}a_{134}e_{134}e_{123} + e_{123}a_{234}e_{234}e_{123}+$

$e_{123}a_{1234}e_{1234}e_{123} = 0$

$a_0e_{123}e_{123} + a_1e_{123}e_1e_{123} + a_2e_{123}e_2e_{123} + a_3e_{123}e_3e_{123} + a_4e_{123}e_4e_{123} + a_{12}e_{123}e_{12}e_{123} +$
$a_{13}e_{123}e_{13}e_{123} + a_{14}e_{123}e_{14}e_{123} + a_{23}e_{123}e_{23}e_{123} + a_{24}e_{123}e_{24}e_{123} + a_{34}e_{123}e_{34}e_{123}+$

$a_{123}e_{123}e_{123}e_{123} + a_{124}e_{123}e_{124}e_{123} + a_{134}e_{123}e_{134}e_{123} + a_{234}e_{123}e_{234}e_{123}+$

$a_{1234}e_{123}e_{1234}e_{123} = 0$

$a_0(-1) + a_1e_1e_{123}e_{123} + a_2e_2e_{123}e_{123} + a_3e_3e_{123}e_{123} + a_4(-e_4e_{123})e_{123} + a_{12}e_{12}e_{123}e_{123} +$
$a_{13}e_{13}e_{123}e_{123} + a_{14}(-e_{14}e_{123})e_{123} + a_{23}e_{23}e_{123}e_{123} + a_{24}(-e_{24}e_{123})e_{123} + a_{34}(-e_{34}e_{123})e_{123}+$
$a_{123}e_{123}e_{123}e_{123} + a_{124}(-e_{124}e_{123})e_{123} + a_{134}(-e_{134}e_{123})e_{123} + a_{234}(-e_{234}e_{123})e_{123}+$
$a_{1234}(-e_{1234}e_{123})e_{123} = 0$

$-a_0 + a_1e_1(e_{123}e_{123}) + a_2e_2(e_{123}e_{123}) + a_3e_3(e_{123}e_{123}) - a_4e_4(e_{123}e_{123}) + a_{12}e_{12}(e_{123}e_{123})+$
$a_{13}e_{13}(e_{123}e_{123}) - a_{14}e_{14}(e_{123}e_{123}) + a_{23}e_{23}(e_{123}e_{123}) - a_{24}e_{24}(e_{123}e_{123}) - a_{34}e_{34}(e_{123}e_{123})+$
$a_{123}e_{123}(e_{123}e_{123}) - a_{124}e_{124}(e_{123}e_{123}) - a_{134}e_{134}(e_{123}e_{123}) - a_{234}e_{234}(e_{123}e_{123})-$
$a_{1234}e_{1234}(e_{123}e_{123}) = 0$

$-a_0 + a_1e_1(-1) + a_2e_2(-1) + a_3e_3(-1) - a_4e_4(-1) + a_{12}e_{12}(-1) + a_{13}e_{13}(-1) -$
$a_{14}e_{14}(-1) + a_{23}e_{23}(-1) - a_{24}e_{24}(-1) - a_{34}e_{34}(-1) + a_{123}e_{123}(-1) - a_{124}e_{124}(-1) -$
$a_{134}e_{134}(-1) - a_{234}e_{234}(-1) - a_{1234}e_{1234}(-1) = 0$

$-a_0 - a_1e_1 - a_2e_2 - a_3e_3 + a_4e_4 - a_{12}e_{12} - a_{13}e_{13} + a_{14}e_{14} - a_{23}e_{23} + a_{24}e_{24} + a_{34}e_{34} -$
$a_{123}e_{123} + a_{124}e_{124} + a_{134}e_{134} + a_{234}e_{234} + a_{1234}e_{1234} = 0$ .... **(II)**

Restando **(I)** - **(II)** se obtiene

$2a_0 + 2a_1e_1 + 2a_2e_2 + 2a_3e_3 + 2a_{12}e_{12} + 2a_{13}e_{13} + 2a_{23}e_{23} + 2a_{123}e_{123} = 0$

$a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23} + a_{123}e_{123} = 0$ .... **(III)**

Sean a_0 , $a_{123} \in \mathbb{R}$ tal que

$a_0 + a_{123}e_{123} = 0$

$a_0 = -a_{123}e_{123}$

$a_0a_0 = (-a_{123}e_{123})(-a_{123}e_{123})$

$a_0^2 = a_{123}^2e_{123})e_{123}$

$0 \leq a_0^2 = -a_{123}^2 \leq 0$

$a_0^2 = a_{123}^2 = 0$

$a_0 = a_{123} = 0$

por lo tanto $\{1 \ , \ e_{123}\}$ es l.i

multiplicando e_{12} por la derecha e izquierda a **(III)**

$e_{12}(a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23} + a_{123}e_{123})e_{12} = 0$

$e_{12}a_0e_{12}+e_{12}a_1e_1e_{12}+e_{12}a_2e_2e_{12}+e_{12}a_3e_3e_{12}+e_{12}a_{12}e_{12}e_{12}+e_{12}a_{13}e_{13}e_{12}+e_{12}a_{23}e_{23}e_{12}+ e_{12}a_{123}e_{123}e_{12} = 0$

$a_0e_{12}e_{12}+a_1e_{12}e_1e_{12}+a_2e_{12}e_2e_{12}+a_3e_{12}e_3e_{12}+a_{12}e_{12}e_{12}e_{12}+a_{13}e_{12}e_{13}e_{12}+a_{23}e_{12}e_{23}e_{12}+ a_{123}e_{12}e_{123}e_{12} = 0$

$a_0(-1)+a_1(-e_1e_{12})e_{12}+a_2(-e_2e_{12})e_{12}+a_3(e_3e_{12})e_{12}+a_{12}e_{12}(-1)+a_{13}(-e_{13}e_{12})e_{12}+ a_{23}(-e_{23}e_{12})e_{12} + a_{123}(e_{123}e_{12})e_{12} = 0$

$-a_0 - a_1e_1e_{12}e_{12} - a_2e_2e_{12}e_{12} + a_3e_3e_{12}e_{12} - a_{12}e_{12} - a_{13}e_{13}e_{12}e_{12} - a_{23}e_{23}e_{12}e_{12} + a_{123}e_{123}e_{12}e_{12} = 0$

$-a_0-a_1e_1(-1)-a_2e_2(-1)+a_3e_3(-1)-a_{12}e_{12}-a_{13}e_{13}(-1)-a_{23}e_{23}(-1)+a_{123}e_{123}(-1) = 0$

$-a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 - a_3e_3 - a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23} - a_{123}e_{123} = 0$ .... **(1)**

Sumando **(III)** y **(1)**

$2a_1e_1 + 2a_2e_2 + 2a_{13}e_{13} + 2a_{23}e_{23} = 0$

$a_1e_1 + a_2e_2 + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23} = 0$ .... **(2)**

multiplicando **(2)** por la derecha e izquierda por e_{13}

$e_{13}(a_1e_1 + a_2e_2 + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23})e_{13} = 0$

$e_{13}a_1e_1e_{13} + e_{13}a_2e_2e_{13} + e_{13}a_{13}e_{13}e_{13} + e_{13}a_{23}e_{23}e_{13} = 0$

$a_1e_{13}e_1e_{13} + a_2e_{13}e_2e_{13} + a_{13}e_{13}e_{13}e_{13} + a_{23}e_{13}e_{23}e_{13} = 0$

$a_1(-e_1e_{13})e_{13} + a_2(e_2e_{13})e_{13} + a_{13}(e_{13}e_{13})e_{13} + a_{23}(-e_{23}e_{13})e_{13} = 0$

$-a_1e_1(e_{13}e_{13}) + a_2e_2(e_{13}e_{13}) + a_{13}e_{13}(e_{13}e_{13}) - a_{23}e_{23}(e_{13}e_{13}) = 0$

$-a_1e_1(-1) + a_2e_2(-1) + a_{13}e_{13}(-1) - a_{23}e_{23}(-1) = 0$

$a_1e_1 - a_2e_2 - a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23} = 0$ .... **(3)**

Sumando **(2)** y **(3)**

$2a_1e_1 + 2a_{23}e_{23} = 0$

$a_1e_1 + a_{23}e_{23} = 0$

multiplicando e_1 por izquierda a la última igualdad

$e_1(a_1e_1 + a_{23}e_{23}) = 0$

$e_1a_1e_1 + e_1a_{23}e_{23} = 0$

$a_1e_1e_1 + a_{23}e_1e_{23} = 0$

$a_1 + a_{23}e_{123} = 0$

por lo tanto

$a_1 = a_{23} = 0$

Por otro lado , restando **(2)** y **(3)**

$2a_2e_2 + 2a_{13}e_{13} = 0$

$a_2e_2 + a_{13}e_{13} = 0$

multiplicando e_2 por izquierda la última igualdad

$e_2(a_2e_2 + a_{13}e_{13}) = 0$

$e_2a_2e_2 + e_2a_{13}e_{13} = 0$

$a_2e_2e_2 + a_{13}e_2e_{13} = 0$

$a_2 + a_{13}(e_2e_1)e_3 = 0$

$a_2 + a_{13}(-e_1e_2)e_3 = 0$

$a_2 - a_{13}e_1e_2e_3 = 0$

$a_2 - a_{13}e_{123} = 0$

por lo tanto

$a_2 = -a_{13} = 0$

$a_2 = a_{13} = 0$

reemplazando $a_1 = a_2 = a_{13} = a_{23} = 0$ en **(III)** se obtiene

$a_0 + a_3e_3 + a_{12}e_{12} + a_{123}e_{123} = 0$ .... **(4)**

multiplicando **(4)** por la derecha e izquierda por e_{13}

$e_{13}(a_0 + a_3e_3 + a_{12}e_{12} + a_{123}e_{123})e_{13} = 0$

$e_{13}a_0e_{13} + e_{13}a_3e_3e_{13} + e_{13}a_{12}e_{12}e_{13} + e_{13}a_{123}e_{123}e_{13} = 0$

$a_0e_{13}e_{13} + a_3e_{13}e_3e_{13} + a_{12}e_{13}e_{12}e_{13} + a_{123}e_{13}e_{123}e_{13} = 0$

$a_0(-1) + a_3(-e_3e_{13})e_{13} + a_{12}(-e_{12}e_{13})e_{13} + a_{123}(e_{123}e_{13})e_{13} = 0$

$-a_0 - a_3e_3(e_{13}e_{13}) - a_{12}e_{12}(e_{13}e_{13}) + a_{123}e_{123}(e_{13}e_{13}) = 0$

$-a_0 - a_3e_3(-1) - a_{12}e_{12}(-1) + a_{123}e_{123}(-1) = 0$

$-a_0 + a_3e_3 + a_{12}e_{12} - a_{123}e_{123} = 0$ .... **(5)**

Sumando **(4)** y **(5)**

$2a_3e_3 + 2a_{12}e_{12} = 0$

$a_3e_3 + a_{12}e_{12} = 0$

multiplicando por e_3 a la última igualdad

$(a_3e_3 + a_{12}e_{12})e_3 = 0$

$a_3e_3e_3 + a_{12}e_{12}e_3 = 0$

$a_3 + a_{12}e_{123} = 0$

por lo tanto

$a_3 = a_{12} = 0$

reemplazando $a_1 = a_2 = a_3 = a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ en **(III)** se obtiene

$a_0 + a_{123}e_{123} = 0$

por lo tanto

$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{123} = 0$ .... **(6)** es decir

$\{1\ ,\ e_1\ ,\ e_2\ ,\ e_3\ ,\ e_{12}\ ,\ e_{13}\ ,\ e_{23}\ ,\ e_{123}\}$ es linealmente independiente en AG(3) .... **(IV)**

Reemplazando **(6)** en **(I)** se obtiene

$a_4e_4 + a_{14}e_{14} + a_{24}e_{24} + a_{34}e_{34} + a_{124}e_{124} + a_{134}e_{134} + a_{234}e_{234} + a_{1234}e_{1234} = 0$

multiplicando por la derecha de la ultima igualdad por e_4

$(a_4e_4 + a_{14}e_{14} + a_{24}e_{24} + a_{34}e_{34} + a_{124}e_{124} + a_{134}e_{134} + a_{234}e_{234} + a_{1234}e_{1234})e_4 = 0$

$a_4e_4e_4 + a_{14}e_{14}e_4 + a_{24}e_{24}e_4 + a_{34}e_{34}e_4 + a_{124}e_{124}e_4 + a_{134}e_{134}e_4 + a_{234}e_{234}e_4 + a_{1234}e_{1234}e_4 = 0$

$a_4e_4e_4 + a_{14}e_1e_4e_4 + a_{24}e_2e_4e_4 + a_{34}e_3e_4e_4 + a_{124}e_{12}e_4e_4 + a_{134}e_{13}e_4e_4 + a_{234}e_{23}e_4e_4 + a_{1234}e_{123}e_4e_4 = 0$

$a_4(-1)+a_{14}e_1(-1)+a_{24}e_2(-1)+a_{34}e_3(-1)+a_{124}e_{12}(-1)+a_{134}e_{13}(-1)+a_{234}e_{23}(-1)+a_{1234}e_{123}(-1) = 0$

$-a_4 - a_{14}e_1 - a_{24}e_2 - a_{34}e_3 - a_{124}e_{12} - a_{134}e_{13} - a_{234}e_{23} - a_{1234}e_{123} = 0$

y por **(IV)**

$-a_4 = -a_{14} = -a_{24} = -a_{34} = -a_{124} = -a_{134} = -a_{234} = -a_{1234} = 0$

$a_4 = a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{124} = a_{134} = a_{234} = a_{1234} = 0$

Juntando **(6)** con estas ultimas igualdades se obtiene

$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = a_{34} = a_{123} = a_{124} = a_{134} = a_{234} = a_{1234} = 0$

es decir

$\{1\ ,\ e_1\ ,\ e_2\ ,\ e_3\ ,\ e_4\ ,\ e_{12}\ ,\ e_{13}\ ,\ e_{14}\ ,\ e_{23}\ ,\ e_{24}\ ,\ e_{34}\ ,$

$e_{123}\ ,\ e_{124}\ ,\ e_{134}\ ,\ e_{234}\ ,\ e_{1234}\}$ es linealmente independiente en AG(3,1) , en consecuencia base de AG(3,1) y dim(AG(3,1)) = 16.

■

Si se desarrolla la sumatoria de un multivector M $\in$ AG(3,1)

$$M = \sum_{k=0}^{4} \sum_{|I|=k} a_I e_I = \sum_{|I|=0} a_I e_I + \sum_{|I|=1} a_I e_I + \sum_{|I|=2} a_I e_I + \sum_{|I|=3} a_I e_I + \sum_{|I|=4} a_I e_I$$

se puede identificar

$$\sum_{|I|=0} a_I e_I = a_0$$

$$\sum_{|I|=1} a_I e_I = \sum_{i=1}^{4} a_i e_i = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4$$

$$\sum_{|I|=2} a_I e_I = \sum_{1\leq i<j\leq 4} a_{ij}e_{ij} = a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{14}e_{14} + a_{23}e_{23} + a_{24}e_{24} + a_{34}e_{34}$$

$$\sum_{|I|=3} a_I e_I = \sum_{1\leq i<j<l\leq 4} a_{ijl}e_{ijl} = a_{123}e_{123} + a_{124}e_{124} + a_{134}e_{134} + a_{234}e_{234}$$

$$\sum_{|I|=4} a_I e_I = a_{1234}e_{1234}$$

en este sentido, tambien se puede escribir

$e_I \in \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ si $|I| = 1$ ó $I \in \{1, 2, 3, 4\}$

$e_I \in \{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}\}$ si $|I| = 2$ ó $I \in \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}$

$e_I \in \{e_{123}, e_{124}, e_{134}, e_{234}\}$ si $|I| = 3$ ó $I \in \{123, 124, 134, 234\}$

$e_I \in \{e_{1234}\}$ si $|I| = 4$ ó $I \in \{1234\}$

$e_I = 1$ si $|I| = 0$ ó $I = \emptyset$

3.2. El subespacio vectorial de los k - vectores en AG(3,1)

Definición 3.2.1.

$$\langle AG(3,1)\rangle_k := \{M \in AG(3,1); M = \sum_{|I|=k} a_I e_I\} \ , \ \ k = 0,1,2,3,4$$

es llamado el subespacio de los k - vectores en AG(3,1)

Proposición 3.2.2. $\langle AG(3,1)\rangle_k$ *es subespacio vectorial de AG(3,1) para todo k = 0,1,2,3,4.*

Demostración.

$$0 = \sum_{k=0}^{4} \sum_{|I|=k} 0 e_I = \sum_{|I|=k} 0 e_I \in \langle AG(3,1)\rangle_k$$

para todo k = 0,1,2,3,4.

$$Sea \ \ M = \sum_{|I|=k} a_I e_I \ \ , \ \ N = \sum_{|I|=k} b_I e_I \in \langle AG(3,1)\rangle_k$$

$$M + N = \sum_{|I|=k} a_I e_I + \sum_{|I|=k} b_I e_I = \sum_{|I|=k} (a_I + b_I) e_I \in \langle AG(3,1)\rangle_k$$

$$Sea \ \ M = \sum_{|I|=k} a_I e_I \ \ \in \langle AG(3,1)\rangle_k \ \ y \ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\alpha M = \alpha(\sum_{|I|=k} a_I e_I) = \sum_{|I|=k} (\alpha a_I) e_I \in \langle AG(3,1)\rangle_k$$

Por lo tanto $\langle AG(3,1)\rangle_k$ es un subespacio vectorial de AG(3,1)

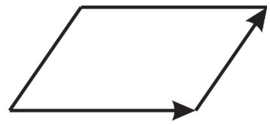
■

El $1_$vector M $\in \langle AG(3,1)\rangle_1$ será llamado simplemente **vector** en AG(3,1) y se representa geométricamente como un segmento de recta orientado (flecha).

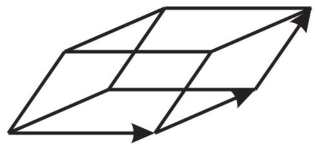
El $2_$vector M $\in \langle AG(3,1)\rangle_2$ será llamado simplemente **bivector** en AG(3,1) y se representa geométricamente como un paralelogramo orientado.

El $3_$vector M $\in \langle AG(3,1)\rangle_3$ será llamado simplemente **trivector** en AG(3,1) y se representa geométricamente como un paralelepipedo orientado.

vector en AG(3,1)



Bivector en AG(3,1)



Trivector en AG(3,1)

El $0_$vector M $\in \langle AG(3,1)\rangle_0$ será llamado simplemente **escalar** en AG(3,1) y no tiene representación geométricamente.

El $4_$vector M $\in \langle AG(3,1)\rangle_4$ será llamado simplemente **pseudoescalar** ó **tetravector**en AG(3,1) y no tiene representación geométricamente.

Los $k_$vectores se escriben explicitamente del siguiente modo:

El $1_$vector ó vector

$$\sum_{|I|=1} a_I e_I = a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4 \in \langle AG(3,1)\rangle_1$$

El $2_$vector ó bivector

$$M = a_{12}e_{12}+a_{13}e_{13}+a_{14}e_{14}+a_{23}e_{23}+a_{24}e_{24}+a_{34}e_{34} \in \langle AG(3,1)\rangle_2$$

El $3_$vector ó trivector

$$M = a_{123}e_{123}+a_{124}e_{124}+a_{134}e_{134}+a_{234}e_{234}$$

El $4_$vector ó tetravector o pseudoescalar

$$M = \sum_{|I|=4} a_I e_I = a_{1234}e_{1234}$$

El $0_$vector ó escalar

$$M = \sum_{|I|=0} a_I e_I = a_0$$

Ejemplo 3.2.3. .

$2e_1 + 8e_2 - 14e_3 + 5e_4 \in \langle AG(3,1) \rangle_1$

$7e_{12} - 9e_{13} + 2e_{14} + 6e_{23} + (Log7)e_{24} + \dfrac{2}{3}e_{34} \in \langle AG(3,1) \rangle_2$

$\dfrac{1}{5}e_{123} + e^2 e_{124} + (Ln7)e_{134} - 11e_{234} \in \langle AG(3,1) \rangle_3$

$7e_{1234} \in \langle AG(3,1) \rangle_4$

$18 \in \langle AG(3,1) \rangle_0$

$3e_1 - 4e_3 \equiv 3e_1 + 0e_2 - 4e_3 + 0e_4 \in \langle AG(3,1) \rangle_1$

$5e_{13} + 6e_{14} + 9e_{34} \equiv 0e_{12} + 5e_{13} + 6e_{14} + 0e_{23} + 0e_{24} + 9e_{34} \in \langle AG(3,1) \rangle_2$

$-2e_{234} \equiv 0e_{123} + 0e_{124} + 0e_{134} - 2e_{234} \in \langle AG(3,1) \rangle_3$

$8e_4 + 5e_{23} - 6e_{234} \in AG(3,1)$

Capítulo 4

Cálculo en AG(3,1)

4.1. Funciones multivectoriales

Definición 4.1.1. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ e I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.*
$C^1[\Omega \times I, AG(3,1)]$ denota las llamadas ***funciones multivectoriales*** *en AG(3,1).*

$$M = \sum_{k=0}^{4} \sum_{|I|=k} f_I e_I \in C^1[\Omega \times I, AG(3,1)] \quad con \quad f_I \in C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}]$$

donde

$$M(\boldsymbol{x}, t) = f_0(\boldsymbol{x}, t) + \sum_{i=1}^{4} f_i(\boldsymbol{x}, t) e_i + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} f_{ij}(\boldsymbol{x}, t) e_{ij} + \sum_{1 \leq i < j < l \leq 4} f_{ijl}(\boldsymbol{x}, t) e_{ijl} + f_{1234}(\boldsymbol{x}, t) e_{1234}$$

con $f_0, f_i, f_{ij}, f_{ijl}, f_{1234} \in C^1[\Omega \times I, \mathbb{R}]$ y $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times I$.

$C^1[\Omega \times I, AG(3,1)]$ son funciones de clase C^1 definidas en $\Omega \times I \subset \mathbb{R}^4$ y con valores en AG(3,1).

Definición 4.1.2. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ e I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$*

$C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1) \rangle_k]$ denota las llamadas ***funciones*** *k_-* ***vectoriales*** *en AG(3,1) con k = 0,1,2,3,4.*

$$M = \sum_{|I|=k} f_I e_I \in C^1[\Omega \times I, \langle AG(3,1) \rangle_k] \quad con \quad f_I \in C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}]$$

$C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1) \rangle_k]$ son funciones de clase C^1 definidas en $\Omega \times I \subset \mathbb{R}^4$ y con valores en $\langle AG(3,1) \rangle_k$, con k = 0,1,2,3,4.

$C^1[\Omega \times I, \langle AG(3,1) \rangle_k] \subset C^1[\Omega \times I, AG(3,1)]$

Si k = 1 , M $\in C^1[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_1] \equiv C^1[\Omega \times I, \mathbb{R}^3]$ será llamada simplemente **función vectorial** en AG(3,1) , para este caso

$$M = \sum_{|I|=1} f_I e_I = \sum_{i=1}^{4} f_i e_i = f_1e_1 + f_2e_2 + f_3e_3 + f_4e_4$$

Si k = 2, M $\in C^1[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_2]$ será llamada simplemente **función bivectorial** en AG(3,1), para este caso

$$M = \sum_{|I|=2} f_I e_I = \sum_{1\leq i<j\leq 4} f_{ij} e_{ij}$$

$$= f_{12}e_{12} + f_{13}e_{13} + f_{14}e_{14} + f_{23}e_{23} + f_{24}e_{24} + f_{34}e_{34}$$

Si k=3, M $\in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_3]$ será llamada simplemente **función trivectorial** en AG(3,1), para este caso

$$M = \sum_{|I|=3} f_I e_I = \sum_{1\leq i<j\leq 4} f_{ij} e_{ij} = f_{123}e_{123} + f_{124}e_{124} + f_{134}e_{134} + f_{234}e_{234}$$

Si k = 4, M $\in C^1[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_4]$ será llamada simplemente **función tetravectorial o pseudoescalar** en AG(3,1), para este caso

$$M = \sum_{|I|=4} f_I e_I = f_{1234}e_{1234}$$

Si k = 0, M $\in C^1[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_0]$ será llamada simplemente **función escalar** en AG(3,1), para este caso

$$M = \sum_{|I|=0} f_I e_I = f_0 \in C^1[\Omega \times I, \mathbb{R}]$$

Ejemplo 4.1.3. .

1. *Si* $M(x,y,z,t) = (t^3+y^2+x)e_1 + (zxy)e_2 + (y+t+x^2)e_3 + log(xy)e_4$, *entonces* $M \in C^1[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_1]$

2. *Si* $N(x,y,z,t) = (xln(t))e_{12} + (x^2+y^2+z^2)e_{13} + te_{14} + \frac{x}{y}e_{23} + (1+t-x)e_{24} + (z+x)e_{34}$, *entonces*
   $N \in C^1[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_2]$

3. *Si* $T(x,y,z,t) = (e^x+3)e_{123} + (ln(x+z)+yt^2)e_{124} + (\frac{1}{t})e_{134} + (\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2})e_{234}$, *entonces*
   $T \in C^1[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_3]$

4. *Si* $R(x,y,z,t) = |x+y+z+t|e_{1234}$, *entonces* $R \in C^1[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_4] \cong C^1[\Omega \times I, \mathbb{R}]$
5. *Si* $Q(x,y,z,t) = 7+t-z-y+xty$, *entonces* $Q \in C^1[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_0] \cong C^1[\Omega \times I, \mathbb{R}]$
6. *Si* $S(x,y,z,t) = (8+z^2) + (x^2 - ln(z))e_3 - (|y| + e^{z+t})e_{1234}$, *entonces* $S \in C^1[\Omega \times I, AG(3,1)]$

Definición 4.1.4.

$$Sea\ \ M = \sum_{k=0}^{4} \sum_{|I|=k} f_I e_I\ \ ,\ \ P = \sum_{k=0}^{4} \sum_{|I|=k} g_I e_I \in C^1[\Omega \times I, AG(3,1)] \quad , \quad f \in C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}]$$

$s \in AG(3,1)\ \ y\ \ \alpha \in \mathbb{R}$

1. *La **suma*** $M + P \in C^1[\Omega \times I, AG(3,1)]$ *se define*

$$(M{+}P)(\boldsymbol{x},t) := \sum_{k=0}^{4} \sum_{|I|=k} (f_I + g_I)(\boldsymbol{x},t)e_I \in AG(3,1)$$

para todo $(\boldsymbol{x},t) \in \Omega \times I$

2. *La **multiplicacion*** $fM, sM, Ms, \alpha M \in C^1[\Omega \times I, AG(3,1)]$ *se define*

$$(fM)(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=0}^{4} \sum_{|I|=k} f(\boldsymbol{x},t) f_I(\boldsymbol{x},t)e_I \in AG(3,1)$$

$$(sM)(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=0}^{4} \sum_{|I|=k} f_I(\boldsymbol{x},t) s e_I \in AG(3,1)$$

$$(Ms)(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=0}^{4} \sum_{|I|=k} f_I(\boldsymbol{x},t) e_I s \in AG(3,1)$$

$$(\alpha M)(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=0}^{4} \sum_{|I|=k} \alpha f_I(\boldsymbol{x},t) e_I \in AG(3,1)$$

para todo $(\boldsymbol{x},t) \in \Omega \times I$

3. *El **producto geométrico** MP*$\in C^1[\Omega \times I, AG(3,1)]$ *se define*

$$(MP)(\boldsymbol{x},t) := \sum_{k=0}^{4} \sum_{r=0}^{4} \sum_{|I|=k} \sum_{|J|=r} f_I(\boldsymbol{x},t) g_J(\boldsymbol{x},t) e_I e_J \in AG(3,1)$$

Proposición 4.1.5. *$C^1[\Omega \times I, AG(3,1)]$ y $C^1[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_k]$ con k = 0,1,2,3,4 son*

1. *$\mathbb{R}$_espacio vectorial*
2. *$C^1[\Omega \times I, \mathbb{R}]$_módulo*
3. *$AG(3,1)$_módulo*

4.2. La derivada geométrica

Definición 4.2.1. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ e I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.*

$$M = \sum_{k=0}^{4} \sum_{|I|=k} f_I e_I \in C^1[\Omega \times I; AG(3,1)]$$

1. *$\partial_n M \in C^1[\Omega \times I; AG(3,1)]$, llamada n_ésima* ***derivada parcial*** *de M en AG(3,1), se define*

$$\partial_n M(\boldsymbol{x}, t) := \sum_{k=0}^{4} \sum_{|I|=k} \partial_n f_I(\boldsymbol{x}, t) e_I \in AG(3,1)$$

con n = 1,2,3,4 y $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times I \subset \mathbb{R}^4$

Explicitamente

$$\partial_n M(\boldsymbol{x}, t) = \partial_n f_0(\boldsymbol{x}, t) \ + \ \sum_{i=1}^{4} \partial_n f_i(\boldsymbol{x}, t) e_i \ + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \partial_n f_{ij}(\boldsymbol{x}, t) e_{ij} \ + \sum_{1 \leq i < j < l \leq 4} \partial_n f_{ijl}(\boldsymbol{x}, t) e_{ijl}$$
$$+ \ \partial_n f_{1234}(\boldsymbol{x}, t) e_{1234} \in AG(3,1)$$

con $f_0, f_i, f_{ij}, f_{ijl}, f_{1234} \in C^1[\Omega \times I, \mathbb{R}]$ y $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times I$.

Además, se denota con

$$\left.\begin{array}{l} \partial_1 \equiv \partial_x \\ \partial_2 \equiv \partial_y \\ \partial_3 \equiv \partial_z \end{array}\right\} \blacktriangleright \text{derivadas espaciales}$$
$$\left.\begin{array}{l} \partial_4 \equiv \partial_t \end{array}\right\} \blacktriangleright \text{derivada temporal}$$

teniendo en cuenta que $(\boldsymbol{x}, t) = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

2. *$\reflectbox{$\partial$} M \in C^1[\Omega \times I; AG(3,1)]$, llamada* ***derivada geométrica por izquierda*** *de M en AG(3,1), se define*

$$\reflectbox{∂} M(\boldsymbol{x}, t) := \sum_{n=1}^{3} e_n \partial_n M(\boldsymbol{x}, t) - e_4 \partial_t M(\boldsymbol{x}, t) \in AG(3,1)$$

con $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times I \subset \mathbb{R}^4$

3. *$M\backepsilon \in C^1[\Omega \times I; AG(3,1)]$, llamada* ***derivada geométrica por derecha*** *de M en AG(3,1), se define*

$$M\backepsilon(\boldsymbol{x}, t) := \sum_{n=1}^{3} [\partial_n M(\boldsymbol{x}, t)]e_n - [\partial_t M(\boldsymbol{x}, t)]e_4 \in AG(3,1)$$

con $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times I \subset \mathbb{R}^4$

Para abreviar, $\backepsilon M$ y $M\backepsilon$ se denotan

$$\partial_n M = \sum_{k=0}^{4} \sum_{|I|=k} \partial_n f_I e_I$$

$$\backepsilon M = \sum_{n=1}^{3} e_n \partial_n M - e_4 \partial_t M$$

$$M\backepsilon = \sum_{n=1}^{3} (\partial_n M)e_n - (\partial_t M)e_4$$

Para demostrar resultados serán muy útiles las notaciones

$$\backepsilon M = \sum_{|R|=1} e_R \partial_R M$$

$$M\backepsilon = \sum_{|R|=1} (\partial_R M)e_R$$

aqui e_R con $|R| = 1$ denota a los $1_$vectores e_1, e_2, e_3, e_4

o de mayor uso será escribir

$$\backepsilon M = \sum_{|J|=1} e_J \partial_J M - e_4 \partial_t M$$

$$M\backepsilon = \sum_{|J|=1} (\partial_J M)e_J - (\partial_t M)e_4$$

Es claro que se esta identificando

$$\sum_{|J|=1} e_J \partial_J M \equiv \sum_{n=1}^{3} e_n \partial_n M$$

$$\sum_{|J|=1} (\partial_J M)e_J \equiv \sum_{n=1}^{3} (\partial_n M)e_n$$

El simbolo $\reflectbox{\partial}$ puede considerarse como un operador definido en $C^1[\Omega \times I; AG(3,1)]$ y con valores en $C^1[\Omega \times I; AG(3,1)]$.

Si se quiere calcular $\reflectbox{\partial}M$, entonces $\reflectbox{\partial}$ se denota con

$$\reflectbox{\partial}M = \sum_{n=1}^{3} e_n\partial_n - e_4\partial_t$$

ó tambien

$$\reflectbox{\partial}M = \sum_{|J|=1} e_J\partial_J - e_4\partial_t$$

Si se quiere calcular $M\reflectbox{\partial}$, entonces $\reflectbox{\partial}$ se denota con

$$M\reflectbox{\partial} = \sum_{n=1}^{3} \partial_n e_n - \partial_t e_4$$

ó tambien

$$M\reflectbox{\partial} = \sum_{|J|=1} \partial_J e_J - \partial_t e_4$$

4.3. Cálculo explícito de la derivada geométrica de una función k_{-}vectorial en AG(3,1)

Sea $M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_k]$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq k \leq 4$. El cálculo explícito de $\reflectbox{\partial}M$ y $M\reflectbox{\partial}$ es del siguiente modo.

Para el caso $0 < k < 4$

$$M = \sum_{|I|=k} f_I e_I \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_k]$$

$$\begin{aligned}
\reflectbox{\partial}M &= \sum_{n=1}^{3} e_n\partial_n M - e_4\partial_t M \\
&\equiv \sum_{|J|=1} e_J\partial_J M - e_4\partial_t M \\
&= \sum_{|J|=1} e_J\partial_J(\sum_{|I|=k} f_I e_I) - e_4\partial_t(\sum_{|I|=k} f_I e_I) \\
&= \sum_{|J|=1}\sum_{|I|=k} \partial_J f_I e_J e_I - \sum_{|I|=k} \partial_t f_I e_4 e_I \\
&\equiv \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I + \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I - (\sum_{\{4\}\cap I\neq\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I + \sum_{\{4\}\cap I=\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I)
\end{aligned}$$

$$= \underbrace{\sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I}_{(k-1)\_vectorial} + \underbrace{\sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I}_{(k+1)\_vectorial} - \underbrace{\sum_{\{4\}\cap I\neq\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I}_{(k-1)\_vectorial} - \underbrace{\sum_{\{4\}\cap I=\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I}_{(k+1)\_vectorial}$$

$$= \underbrace{\sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I - \sum_{\{4\}\cap I\neq\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I}_{.\ funcion\ (k-1)\_vectorial\ .} + \underbrace{\sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I - \sum_{\{4\}\cap I=\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I}_{.\ funcion\ (k+1)\_vectorial\ .}$$

Es decir, la derivada geométrica por izquierda de una función $k_$vectorial en AG(3,1) con $0 < k < 4$ es la suma de una función $(k-1)_$vectorial y una función $(k+1)_$vectorial.

De un modo mas preciso, si se escribe

$$\langle \partial M\rangle_{k-1} = \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I - \sum_{\{4\}\cap I\neq\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I$$

$$\langle \partial M\rangle_{k+1} = \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I - \sum_{\{4\}\cap I=\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I$$

por lo tanto, cuando $M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_k]$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq k \leq 4$ se cumple

$$\partial M = \langle \partial M\rangle_{k-1} + \langle \partial M\rangle_{k+1}$$

Con palabras precisas, la derivada geométrica por izquierda de una función $(k-1)_$vectorial con su parte $(k+1)_$vectorial

Para el caso k = 0

$$M = \sum_{|I|=0} f_I e_I = f_0 e_0 \equiv f_0 \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_0] \cong C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}]$$

pues $e_0 \equiv 1$ que es lo mismo que escribir I = $\{0\}$, y esto a asu vez equivale a $|I| = 0$

$$\partial M = \sum_{n=1}^{3} e_n \partial_n f_0 - e_4 \partial_t f_0$$

$$\equiv \underbrace{\sum_{|J|=1} e_J \partial_J f_0}_{1\_vectorial} - \underbrace{e_4 \partial_t f_0}_{1\_vectorial}$$

$$\langle \partial M\rangle_{k+1} = \langle \partial M\rangle_1 = \sum_{|J|=1} e_J \partial_J f_0 - e_4 \partial_t f_0 = \partial M$$

por lo tanto, cuando $M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_0]$ con $k = 0$ se cumple

$$\partial M = \langle \partial M\rangle_{k+1}$$

Para el caso k = 4

$$M = \sum_{|I|=4} f_I e_I = f_{1234}e_{1234} \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_4]$$

$$\begin{aligned}
\eth M &= \sum_{n=1}^{3} e_n \partial_n M - e_4 \partial_t M \\
&\equiv \sum_{|J|=1} e_J \partial_J M - e_4 \partial_t M \\
&= \sum_{|J|=1} e_J \partial_J (f_{1234}e_{1234}) - e_4 \partial_t (f_{1234}e_{1234}) \\
&= \sum_{|J|=1} \partial_J f_{1234} e_J e_{1234} - \partial_t f_{1234} e_4 e_{1234} \\
&= \underbrace{\sum_{|J|=1} \partial_J f_{1234} e_J e_{1234}}_{.\quad 3_vectorial \quad .} \quad - \quad \underbrace{\partial_t f_{1234} e_{123}}_{3_vectorial}
\end{aligned}$$

$$\langle \eth M\rangle_{k-1} = \langle \eth M\rangle_{4-1} = \langle \eth M\rangle_3 = \sum_{|J|=1} \partial_J f_{1234} e_J e_{1234} - \partial_t f_{1234} e_{123} = \eth M$$

por lo tanto, cuando $M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_k]$ con $k = 4$ se cumple

$$\eth M = \langle \eth M\rangle_{k-1}$$

De igual forma , para calcular $M\eth$

Para el caso $0 < k < 4$

$$M = \sum_{|I|=k} f_I e_I \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_k]$$

$$\begin{aligned}
M\eth &= \sum_{n=1}^{3} (\partial_n M) e_n - (\partial_t M) e_4 \\
&\equiv \sum_{|J|=1} (\partial_J M) e_J - (\partial_t M) e_4 \\
&= \sum_{|J|=1} [\partial_J (\sum_{|I|=k} f_I e_I)] e_J - [\partial_t (\sum_{|I|=k} f_I e_I)] e_4 \\
&= \sum_{|J|=1} \sum_{|I|=k} \partial_J f_I e_I e_J - \sum_{|I|=k} \partial_t f_I e_I e_4 \\
&\equiv \sum_{J\cap I \neq \emptyset} \partial_J f_I e_I e_J + \sum_{J\cap I = \emptyset} \partial_J f_I e_I e_J - (\sum_{\{4\}\cap I \neq \emptyset} \partial_t f_I e_I e_4 + \sum_{\{4\}\cap I = \emptyset} \partial_t f_I e_I e_4)
\end{aligned}$$

$$= \underbrace{\sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_I e_J}_{(k-1)\_vectorial} + \underbrace{\sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_I e_J}_{(k+1)\_vectorial} - \underbrace{\sum_{\{4\}\cap I\neq\emptyset} \partial_t f_I e_I e_4}_{(k-1)\_vectorial} - \underbrace{\sum_{\{4\}\cap I=\emptyset} \partial_t f_I e_I e_4}_{(k+1)\_vectorial}$$

$$= \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I[(-1)^{k-1} e_J e_I] - \sum_{\{4\}\cap I\neq\emptyset} \partial_t f_I[(-1)^{k-1} e_4 e_I] + \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I[(-1)^{k} e_J e_I] - \sum_{\{4\}\cap I=\emptyset} \partial_t f_I[(-1)^{k} e_4 e_I]$$

$$= (-1)^{k-1} \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I - (-1)^{k-1} \sum_{\{4\}\cap I\neq\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I + (-1)^{k} \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I - (-1)^{k} \sum_{\{4\}\cap I=\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I$$

$$= \underbrace{(-1)^{k-1}\Big(\sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I - \sum_{\{4\}\cap I\neq\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I\Big)}_{funcion\ (k-1)\_vectorial} + \underbrace{(-1)^{k}\Big(\sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I - \sum_{\{4\}\cap I=\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I\Big)}_{funcion\ (k+1)\_vectorial}$$

Es decir, la derivada geométrica por derecha de una función $k_$vectorial en AG(3,1) con $0 < k < 4$ es la suma de una función $(k-1)_$vectorial y una función $(k+1)_$vectorial.

De un modo mas preciso, si

$$\langle M\partial\rangle_{k-1} = (-1)^{k-1}\Big(\sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I - \sum_{\{4\}\cap I\neq\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I\Big)$$

$$\langle M\partial\rangle_{k+1} = (-1)^{k}\Big(\sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I - \sum_{\{4\}\cap I=\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I\Big)$$

por lo tanto, cuando $M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_k]$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq k \leq 4$ se cumple

$$M\partial = \langle M\partial\rangle_{k-1} + \langle M\partial\rangle_{k+1}$$

en resumen, la derivada geométrica por derecha de una funcion $(k)_$vectorial es la suma de su parte $(k-1)_$vectorial con su parte $(k+1)_$vectorial

Para el caso k = 0

$$M = \sum_{|I|=0} f_I e_I = f_0 e_0 \equiv f_0 \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_0] \cong C^1[\Omega \times I; \mathbb{R}]$$

pues $e_0 \equiv 1$ que es lo mismo que escribir I = $\{0\}$, y esto a asu vez equivale a $|I| = 0$

$$M\partial = \sum_{n=1}^{3} (\partial_n f_0) e_n - (\partial_t f_0) e_4$$

$$\equiv \underbrace{\sum_{|J|=1} (\partial_J f_0) e_J}_{1\_vectorial} - \underbrace{(\partial_t f_0) e_4}_{1\_vectorial}$$

$$\langle M\partial\rangle_{k+1} = \langle M\partial\rangle_1 = \sum_{|J|=1} (\partial_J f_0) e_J - (\partial_t f_0) e_4 = M\partial$$

por lo tanto, cuando $M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_k]$ con $k = 0$ se cumple

$M\partial = \langle M\partial\rangle_{k+1}$

Para el caso k = 4

$$M = \sum_{|I|=4} f_I e_I = f_{1234}e_{1234} \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_4]$$

$$\begin{aligned} M\partial &= \sum_{n=1}^{3} (\partial_n M)e_n - (\partial_t M)e_4 \\ &\equiv \sum_{|J|=1} (\partial_J M)e_J - (\partial_t M)e_4 \\ &= \sum_{|J|=1} (\partial_J f_{1234})e_{1234}e_J - (\partial_t f_{1234})e_{1234}e_4 \\ &= \underbrace{\sum_{|J|=1}(\partial_J f_{1234})e_{1234}e_J}_{3\_vectorial} \quad - \quad \underbrace{(\partial_t f_{1234})e_{123}}_{3\_vectorial} \end{aligned}$$

$$\langle M\partial\rangle_{k-1} = \langle M\partial\rangle_{4-1} = \langle M\partial\rangle_3 = \sum_{|J|=1} (\partial_J f_{1234})e_{1234}e_J - (\partial_t f_{1234})e_{123} = M\partial$$

por lo tanto, cuando $M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_k]$ con $k = 4$ se cumple

$M\partial = \langle M\partial\rangle_{k-1}$

Por otro lado , para 0 <k <4 , se vio que

$$\langle \partial M\rangle_{k-1} = \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I - \sum_{\{4\}\cap I\neq\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I$$

$$\langle \partial M\rangle_{k+1} = \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I - \sum_{\{4\}\cap I=\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I$$

$$\langle M\partial\rangle_{k-1} = (-1)^{k-1}\Big(\sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I - \sum_{\{4\}\cap I\neq\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I\Big)$$

$$\langle M\partial\rangle_{k+1} = (-1)^{k}\Big(\sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I - \sum_{\{4\}\cap I=\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I\Big)$$

por lo tanto

$\langle M\partial\rangle_{k-1} = (-1)^{k-1}\langle \partial M\rangle_{k-1}$

$\langle M\partial\rangle_{k+1} = (-1)^{k}\langle \partial M\rangle_{k+1}$

Para el caso k = 0

$$
\begin{aligned}
\langle M\reflectbox{\ensuremath{\partial}}\rangle_{k+1} = M\reflectbox{\ensuremath{\partial}} &= \sum_{n=1}^{3}(\partial_n f_0)e_n - (\partial_t f_0)e_4 \\
&\equiv \sum_{|J|=1}(\partial_J f_0)e_J \quad - \quad (\partial_t f_0)e_4 \\
&= \sum_{|J|=1} e_J(\partial_J f_0) \quad - \quad e_4(\partial_t f_0) \\
&= \reflectbox{\ensuremath{\partial}}M \\
&= \langle \reflectbox{\ensuremath{\partial}}M\rangle_{k+1} \\
&= (-1)^k\langle \reflectbox{\ensuremath{\partial}}M\rangle_{k+1}
\end{aligned}
$$

Para el caso k = 4

$$
\begin{aligned}
\langle M\reflectbox{\ensuremath{\partial}}\rangle_{k-1} = M\reflectbox{\ensuremath{\partial}} &= \sum_{n=1}^{3}(\partial_n f_{1234})e_{1234}e_n - (\partial_t f_{1234})e_{1234}e_4 \\
&\equiv \sum_{|J|=1}(\partial_J f_{1234})e_{1234}e_J - (\partial_t f_{1234})e_{1234}e_4 \\
&= \sum_{|J|=1}(\partial_J f_{1234})e_{1234}e_J + (\partial_t f_{1234})e_{123} \\
&= \sum_{|J|=1}(\partial_J f_{1234})e_{123}(-e_J e_4) + (\partial_t f_{1234})e_{123} \\
&= -\sum_{|J|=1}(\partial_J f_{1234})e_{123}e_J e_4 + (\partial_t f_{1234})e_{123} \\
&= -\sum_{|J|=1}(\partial_J f_{1234})e_J e_{123}e_4 + (\partial_t f_{1234})e_{123} \\
&= -\sum_{|J|=1}(\partial_J f_{1234})e_J e_{1234} + (\partial_t f_{1234})e_{123} \\
&= -(\sum_{|J|=1}(\partial_J f_{1234})e_J e_{1234} - (\partial_t f_{1234})e_{123}) \\
&= -\reflectbox{\ensuremath{\partial}}M \\
&= -\langle \reflectbox{\ensuremath{\partial}}M\rangle_{k-1} \\
&= (-1)^{k-1}\langle \reflectbox{\ensuremath{\partial}}M\rangle_{k-1}
\end{aligned}
$$

Todo lo anterior se resume en el siguiente teorema

Teorema 4.3.1. *Sea* $M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_k]$ *con* $0 \leq k \leq 4$ *entonces*

1. $\partial M = \langle \partial M\rangle_{k-1} + \langle \partial M\rangle_{k+1}$ *para* $0 < k < 4$
2. $M\partial = \langle M\partial\rangle_{k-1} + \langle M\partial\rangle_{k+1}$ *para* $0 < k < 4$
3. $\partial M = \langle \partial M\rangle_{k+1}$ *y* $M\partial = \langle M\partial\rangle_{k+1}$ *para* $k = 0$
4. $\partial M = \langle \partial M\rangle_{k-1}$ *y* $M\partial = \langle M\partial\rangle_{k-1}$ *para* $k = 4$
5. $\langle M\partial\rangle_{k-1} = (-1)^{k-1}\langle \partial M\rangle_{k-1}$ *para* $0 < k$
6. $\langle M\partial\rangle_{k+1} = (-1)^{k}\langle \partial M\rangle_{k+1}$ *para* $k < 4$

■

Corolario 4.3.2. *Sea* $M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_k]$ *con* $0 \leq k \leq 4$ *entonces*

1. $\langle M\partial\rangle_{k+1} = \frac{1}{2}[\partial M + (-1)^k M\partial]$ *para* $k < 4$
2. $\langle M\partial\rangle_{k-1} = \frac{1}{2}[\partial M - (-1)^k M\partial]$ *para* $0 < k$

Demostración. Del teorema anterior para $0 < k < 4$

$\partial M = \langle \partial M\rangle_{k-1} + \langle \partial M\rangle_{k+1}$

$M\partial = \langle M\partial\rangle_{k-1} + \langle M\partial\rangle_{k+1} = (-1)^{k-1}\langle \partial M\rangle_{k-1} + (-1)^{k}\langle \partial M\rangle_{k+1}$

Multiplicando $(-1)^k$ a $M\partial$ se obtiene

$(-1)^k M\partial = (-1)^k(-1)^{k-1}\langle \partial M\rangle_{k-1} + (-1)^k(-1)^{k}\langle \partial M\rangle_{k+1}$

$(-1)^k M\partial = (-1)^{2k-1}\langle \partial M\rangle_{k-1} + (-1)^{2k}\langle \partial M\rangle_{k+1}$

$(-1)^k M\partial = -\langle \partial M\rangle_{k-1} + \langle \partial M\rangle_{k+1}$

Luego

$\partial M + (-1)^k M\partial = \langle \partial M\rangle_{k-1} + \langle \partial M\rangle_{k+1} - \langle \partial M\rangle_{k-1} + \langle \partial M\rangle_{k+1}$

$\partial M + (-1)^k M\partial = 2\langle \partial M\rangle_{k+1}$

por lo tanto $\langle \partial M\rangle_{k+1} = \frac{1}{2}[\partial M + (-1)^k M\partial]$ solo para $0 < k < 4$

Para el caso k = 0

$\langle \partial M\rangle_{k+1} = \partial M == \frac{1}{2}[\partial M + (-1)^k M\partial]$

Por otro lado

Multiplicando $-(-1)^k$ a $M\partial$ se obtiene

$-(-1)^k M\partial = -(-1)^k(-1)^{k-1}\langle \partial M\rangle_{k-1} - (-1)^k(-1)^{k}\langle \partial M\rangle_{k+1}$

$-(-1)^k M\partial = (-1)^{2k}\langle \partial M\rangle_{k-1} - (-1)^{2k}\langle \partial M\rangle_{k+1}$

$-(-1)^k M\partial = \langle \partial M\rangle_{k-1} - \langle \partial M\rangle_{k+1}$

Luego

$\eth M - (-1)^k M\eth = \langle \eth M\rangle_{k-1} + \langle \eth M\rangle_{k+1} + \langle \eth M\rangle_{k-1} - \langle \eth M\rangle_{k+1}$

$\eth M - (-1)^k M\eth = 2\langle \eth M\rangle_{k-1}$

por lo tanto $\langle \eth M\rangle_{k-1} = \dfrac{1}{2}[\eth M - (-1)^k M\eth]$ solo para $\quad 0 < k < 4$

Para el caso k = 4 , del teorema anterior

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[\eth M - (-1)^k M\eth] &= \frac{1}{2}[\eth M - M\eth]\\
&= \frac{1}{2}[\langle \eth M\rangle_{k-1} - \langle M\eth\rangle_{k-1}]\\
&= \frac{1}{2}[\langle \eth M\rangle_{k-1} - (-1)^{k-1}\langle \eth M\rangle_{k-1}]\\
&= \frac{1}{2}[\langle \eth M\rangle_{k-1} + \langle \eth M\rangle_{k-1}]\\
&= \frac{1}{2}[2\langle \eth M\rangle_{k-1}]\\
&= \langle \eth M\rangle_{k-1}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

4.4. Derivada exterior e interior

Sea $M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_k] \quad$ con $\quad 0 \leq k \leq 4$. Una alternativa util para calcular $\eth M$ y $M\eth$ es la siguiente.

$$M = \sum_{|I|=k} f_I e_I \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_k]$$

$$\eth = \sum_{n=1}^{3} e_n \partial_n - e_4 \partial_t \equiv \sum_{|J|=1} e_J \partial_J - e_4 \partial_t \equiv \sum_{|R|=1} e_R \partial_R$$

Para 0 <k <4

$$\begin{aligned}
\eth M &= \sum_{n=1}^{3} e_n \partial_n M - e_4 \partial_t M\\
&\equiv \sum_{|R|=1} e_R \partial_R M\\
&= \sum_{|R|=1} e_R \partial_R \Big(\sum_{|I|=k} f_I e_I\Big)\\
&= \sum_{|R|=1} \sum_{|I|=k} \partial_R f_I e_R e_I
\end{aligned}$$

$$= \underbrace{\sum_{R\cap I\neq\emptyset}\partial_R f_I e_R e_I}_{(k-1)\_vectorial} + \underbrace{\sum_{R\cap I=\emptyset}\partial_R f_I e_R e_I}_{(k+1)\_vectorial}$$

$$M\reflectbox{∂} = \sum_{n=1}^{3}(\partial_n M)e_n - (\partial_t M)e_4$$

$$\equiv \sum_{|R|=1}(\partial_R M)e_R$$

$$= \sum_{|R|=1}[\partial_R(\sum_{|I|=k} f_I e_I)]e_R$$

$$= \sum_{|R|=1}\sum_{|I|=k}\partial_R f_I e_I e_R$$

$$= \sum_{R\cap I\neq\emptyset}\partial_R f_I e_I e_R + \sum_{R\cap I=\emptyset}\partial_R f_I e_I e_R$$

$$= \underbrace{.\ (-1)^{k-1}\sum_{R\cap I\neq\emptyset}\partial_R f_I e_R e_I\ .}_{(k-1)\_vectorial} + \underbrace{.\ (-1)^{k}\sum_{R\cap I=\emptyset}\partial_R f_I e_R e_I\ .}_{(k+1)\_vectorial}$$

Para k = 0

$$M = \sum_{|I|=0} f_I e_I \equiv f \in C^1[\Omega\times I;\mathbb{R}]$$

$$\reflectbox{∂}M = \sum_{n=1}^{3} e_n\partial_n M - e_4\partial_t M$$

$$\equiv \sum_{|R|=1} e_R\partial_R M$$

$$= \underbrace{\sum_{|R|=1} e_R\partial_R f}_{1\_vectorial}$$

$$M\reflectbox{∂} = \sum_{n=1}^{3}(\partial_n M)e_n - (\partial_t M)e_4$$

$$\equiv \sum_{|R|=1}(\partial_R M)e_R$$

$$= \underbrace{\sum_{|R|=1} (\partial_R f) e_R}_{1\_vectorial}$$

es claro que

$$\reflectbox{D} M = \sum_{|R|=1} (\partial_R f) e_R = \sum_{|R|=1} e_R \partial_R f = M \reflectbox{D}$$

Para k = 4

$$M = \sum_{|I|=0} f_I e_I \equiv f e_{1234} \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_4]$$

$$\reflectbox{D} M = \sum_{n=1}^{3} e_n \partial_n M - e_4 \partial_t M$$

$$\equiv \sum_{|R|=1} e_R \partial_R M$$

$$= \sum_{|R|=1} e_R \partial_R (f e_{1234})$$

$$= \underbrace{\sum_{|R|=1} \partial_R f e_R e_{1234}}_{3\_vectorial}$$

$$M \reflectbox{D} = \sum_{n=1}^{3} (\partial_n M) e_n - (\partial_t M) e_4$$

$$\equiv \sum_{|R|=1} (\partial_R M) e_R$$

$$= \sum_{|R|=1} (\partial_R (f e_{1234})) e_R$$

$$= \underbrace{\sum_{|R|=1} \partial_R f e_{1234} e_R}_{3\_vectorial}$$

notar que

$$M \reflectbox{D} = \sum_{|R|=1} \partial_R f e_{1234} e_R = \sum_{|R|=1} \partial_R f(-e_R e_{1234}) = -\sum_{|R|=1} \partial_R f e_R e_{1234} = -\reflectbox{D} M$$

Definición 4.4.1. . *Sea* $M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_k]$ *con* $\quad 0 \leq k \leq 4.$

1. $\partial \uparrow M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_{k+1}]$, *llamada* ***derivada exterior por izquierda*** *de M en AG(3,1), se define*

$$\partial \uparrow M(\boldsymbol{x}, t) := \begin{cases} \langle \partial M(\boldsymbol{x}, t)\rangle_{k+1} & si \;\; k < 4 \\ \\ 0 & si \;\; k = 4 \end{cases}$$

para todo $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times I$

2. $M \uparrow \partial \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_{k+1}]$, *llamada* ***derivada exterior por derecha*** *de M en AG(3,1), se define*

$$M \uparrow \partial(\boldsymbol{x}, t) := \begin{cases} \langle M\partial(\boldsymbol{x}, t)\rangle_{k+1} & si \;\; k < 4 \\ \\ 0 & si \;\; k = 4 \end{cases}$$

para todo $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times I$

3. $\partial \downarrow M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_{k-1}]$, *llamada* ***derivada interior por izquierda*** *de M en AG(3,1), se define*

$$\partial \downarrow M(\boldsymbol{x}, t) := \begin{cases} \langle \partial M(\boldsymbol{x}, t)\rangle_{k-1} & si \;\; k > 0 \\ \\ 0 & si \;\; k = 0 \end{cases}$$

para todo $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times I$

4. $M \downarrow \partial \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_{k-1}]$, *llamada* ***derivada interior por derecha*** *de M en AG(3,1), se define*

$$M \downarrow \partial(\boldsymbol{x}, t) := \begin{cases} \langle M\partial(\boldsymbol{x}, t)\rangle_{k-1} & si \;\; k > 0 \\ \\ 0 & si \;\; k = 0 \end{cases}$$

para todo $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times I$

Si 0 <k <4 , se escribirá

$\partial \uparrow M = \langle \partial M\rangle_{k+1}$

$M \uparrow \partial = \langle M\partial\rangle_{k+1}$

$\partial \downarrow M = \langle \partial M\rangle_{k-1}$

$M \downarrow \partial = \langle M\partial\rangle_{k-1}$

Si k = 0 , se escribirá

$\partial \downarrow M = 0$

$M \downarrow \partial = 0$

Si k = 4 , se escribirá

$\partial \uparrow M = 0$

$M \uparrow \partial = 0$

Teorema 4.4.2. *Sea* $M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_k]$ *con* $\quad 0 \leq k \leq 4$ *, entonces*

1. $\partial \uparrow M = \frac{1}{2}[\partial M + (-1)^k M\partial]$
2. $\partial \downarrow M = \frac{1}{2}[\partial M - (-1)^k M\partial]$
3. $\partial M = \partial \downarrow M + \partial \uparrow M$
4. $M \uparrow \partial = \frac{1}{2}[\partial M + (-1)^k M\partial]$
5. $M \downarrow \partial = \frac{1}{2}[\partial M - (-1)^k M\partial]$
6. $M\partial = M \downarrow \partial + M \uparrow \partial$
7. $M \uparrow \partial = (-1)^k \partial \uparrow M$
8. $M \downarrow \partial = -(-1)^k \partial \downarrow M$

Demostración.

$$M = \sum_{|I|=k} f_I e_I \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_k]$$

$$\partial = \sum_{n=1}^{3} e_n \partial_n - e_4 \partial_t \equiv \sum_{|J|=1} e_J \partial_J - e_4 \partial_t \equiv \sum_{|R|=1} e_R \partial_R$$

$$\partial M = \sum_{|R|=1} \sum_{|I|=k} \partial_R f_I e_R e_I \equiv \underbrace{\sum_{R \cap I \neq \emptyset} \partial_R f_I e_R e_I}_{(k-1)\_vectorial} + \underbrace{\sum_{R \cap I = \emptyset} \partial_R f_I e_R e_I}_{(k+1)\_vectorial}$$

$$M\partial = \sum_{|R|=1} \sum_{|I|=k} \partial_R f_I e_I e_R \equiv \sum_{R \cap I \neq \emptyset} \partial_R f_I e_I e_R + \sum_{R \cap I = \emptyset} \partial_R f_I e_I e_R$$

$$= \underbrace{(-1)^{k-1} \sum_{R \cap I \neq \emptyset} \partial_R f_I e_R e_I}_{.\quad (k-1)\_vectorial \quad .} + \underbrace{(-1)^k \sum_{R \cap I = \emptyset} \partial_R f_I e_R e_I}_{.\quad (k+1)\_vectorial \quad .}$$

Para 0 <k <4

$$\partial \uparrow M = \langle \partial M \rangle_{k+1} = \sum_{R \cap I = \emptyset} \partial_R f_I e_R e_I$$

$$\partial M + (-1)^k M\partial = \sum_{R \cap I \neq \emptyset} \partial_R f_I e_R e_I + \sum_{R \cap I = \emptyset} \partial_R f_I e_R e_I$$
$$+ (-1)^k [(-1)^{k-1} \sum_{R \cap I \neq \emptyset} \partial_R f_I e_R e_I + (-1)^k \sum_{R \cap I = \emptyset} \partial_R f_I e_R e_I]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{R\cap I\neq\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I + \sum_{R\cap I=\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I + (-1)^{2k-1} \sum_{R\cap I\neq\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I \\
&\quad +(-1)^{2k} \sum_{R\cap I=\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I \\
&= \sum_{R\cap I\neq\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I + \sum_{R\cap I=\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I - \sum_{R\cap I\neq\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I + \sum_{R\cap I=\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I \\
&= 2 \sum_{R\cap I=\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{2}[\reflectbox{∂} M+(-1)^k M\reflectbox{∂}] = \sum_{R\cap I=\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I = \reflectbox{∂}\uparrow M
$$

$$
\reflectbox{∂}\downarrow M = \langle \reflectbox{∂} M\rangle_{k-1} = \sum_{R\cap I\neq\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I
$$

$$
\begin{aligned}
\reflectbox{∂} M-(-1)^k M\reflectbox{∂} &= \sum_{R\cap I\neq\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I + \sum_{R\cap I=\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I \\
&\quad -(-1)^k[(-1)^{k-1} \sum_{R\cap I\neq\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I + (-1)^k \sum_{R\cap I=\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I] \\
&= \sum_{R\cap I\neq\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I + \sum_{R\cap I=\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I - (-1)^{2k-1} \sum_{R\cap I\neq\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I \\
&\quad -(-1)^{2k} \sum_{R\cap I=\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I \\
&= \sum_{R\cap I\neq\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I + \sum_{R\cap I=\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I + \sum_{R\cap I\neq\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I - \sum_{R\cap I=\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I \\
&= 2 \sum_{R\cap I\neq\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{2}[\reflectbox{∂} M-(-1)^k M\reflectbox{∂}] = \sum_{R\cap I\neq\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I = \reflectbox{∂}\downarrow M
$$

$$
\begin{aligned}
\reflectbox{∂}\downarrow M+\reflectbox{∂}\uparrow M &= \frac{1}{2}[\reflectbox{∂} M-(-1)^k M\reflectbox{∂}]+\frac{1}{2}[\reflectbox{∂} M+(-1)^k M\reflectbox{∂}] \\
&= \frac{1}{2}\reflectbox{∂} M - \frac{1}{2}(-1)^k M\reflectbox{∂} + \frac{1}{2}\reflectbox{∂} M + \frac{1}{2}(-1)^k M\reflectbox{∂}] \\
&= \reflectbox{∂} M
\end{aligned}
$$

$$
M\uparrow\reflectbox{∂} = \langle M\reflectbox{∂}\rangle_{k+1} = (-1)^k \sum_{R\cap I=\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I
$$

$$
\begin{aligned}
M\reflectbox{∂}+(-1)^k\reflectbox{∂} M &= (-1)^{k-1} \sum_{R\cap I\neq\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I + (-1)^k \sum_{R\cap I=\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I \\
&\quad +(-1)^k[\sum_{R\cap I\neq\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I + \sum_{R\cap I=\emptyset} \partial_R f_I e_R e_I]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= [(-1)^{k-1}\sum_{R\cap I\neq\emptyset}\partial_R f_I e_R e_I + (-1)^k \sum_{R\cap I\neq\emptyset}\partial_R f_I e_R e_I] + (-1)^{2k}\sum_{R\cap I=\emptyset}\partial_R f_I e_R e_I \\
&\quad +2(-1)^k \sum_{R\cap I=\emptyset}\partial_R f_I e_R e_I \\
&= 2(-1)^k \sum_{R\cap I=\emptyset}\partial_R f_I e_R e_I
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{2}[M\reflectbox{∂}+(-1)^k\reflectbox{∂}M] = (-1)^k \sum_{R\cap I=\emptyset}\partial_R f_I e_R e_I = M\uparrow\reflectbox{∂}
$$

$$
M\downarrow\reflectbox{∂} = \langle M\reflectbox{∂}\rangle_{k-1} = (-1)^{k-1}\sum_{R\cap I\neq\emptyset}\partial_R f_I e_R e_I
$$

$$
\begin{aligned}
M\reflectbox{∂}-(-1)^k\reflectbox{∂}M &= (-1)^{k-1}\sum_{R\cap I\neq\emptyset}\partial_R f_I e_R e_I+(-1)^k\sum_{R\cap I=\emptyset}\partial_R f_I e_R e_I \\
&\quad -(-1)^k[\sum_{R\cap I\neq\emptyset}\partial_R f_I e_R e_I + \sum_{R\cap I=\emptyset}\partial_R f_I e_R e_I] \\
&= (-1)^{k-1}\sum_{R\cap I\neq\emptyset}\partial_R f_I e_R e_I - (-1)^k\sum_{R\cap I\neq\emptyset}\partial_R f_I e_R e_I \\
&= 2(-1)^{k-1}\sum_{R\cap I\neq\emptyset}\partial_R f_I e_R e_I
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{2}[M\reflectbox{∂}-(-1)^k\reflectbox{∂}M] = (-1)^{k-1}\sum_{R\cap I\neq\emptyset}\partial_R f_I e_R e_I = M\downarrow\reflectbox{∂}
$$

$$
\begin{aligned}
M\downarrow\reflectbox{∂}+M\uparrow\reflectbox{∂} &= \frac{1}{2}[M\reflectbox{∂}-(-1)^k\reflectbox{∂}M]+\frac{1}{2}[M\reflectbox{∂}+(-1)^k\reflectbox{∂}M] \\
&= \frac{1}{2}M\reflectbox{∂} - \frac{1}{2}(-1)^k\reflectbox{∂}M + \frac{1}{2}M\reflectbox{∂} + \frac{1}{2}(-1)^k\reflectbox{∂}M] \\
&= M\reflectbox{∂}
\end{aligned}
$$

$$
\reflectbox{∂}\uparrow M = \frac{1}{2}[\reflectbox{∂}M+(-1)^k M\reflectbox{∂}]
$$

$$
\begin{aligned}
(-1)^k\reflectbox{∂}\uparrow M &= \frac{1}{2}[(-1)^k\reflectbox{∂}M+(-1)^{2k}M\reflectbox{∂}] \\
&= \frac{1}{2}[M\reflectbox{∂} + (-1)^k\reflectbox{∂}M] \\
&= M\uparrow\reflectbox{∂}
\end{aligned}
$$

$$
\reflectbox{∂}\downarrow M = \frac{1}{2}[\reflectbox{∂}M-(-1)^k M\reflectbox{∂}]
$$

$$
\begin{aligned}
-(-1)^k\reflectbox{∂}\downarrow M &= \frac{1}{2}[-(-1)^k\reflectbox{∂}M+(-1)^{2k}M\reflectbox{∂}] \\
&= \frac{1}{2}[M\reflectbox{∂} - (-1)^k\reflectbox{∂}M]
\end{aligned}
$$

$= M \downarrow \partial$

Para k = 0

$\partial \uparrow M = \langle \partial M \rangle_{k+1} = \langle \partial M \rangle_1 = \sum_{|R|=1} e_R \partial_R f = \partial M$

$$
\begin{aligned}
\partial M + (-1)^k M \partial &= \partial M + (-1)^0 M \partial \\
&= \partial M + M \partial \\
&= \partial M + \partial M \\
&= 2\partial M
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{2}[\partial M + (-1)^k M \partial] = \partial M = \partial \uparrow M$

$\partial \downarrow M = 0 \ \ (por\ definicion)$

$$
\begin{aligned}
\partial M - (-1)^k M \partial &= \partial M - (-1)^0 M \partial \\
&= \partial M - M \partial \\
&= \partial M - \partial M \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{2}[\partial M - (-1)^k M \partial] = 0 = \partial \downarrow M$

Es importante recordar que , cuando k = 0, entonces $\partial M = M \partial$

$\partial \downarrow M + \partial \uparrow M = 0 + \partial M = \partial M$

$M \uparrow \partial = \langle M \partial \rangle_{k+1} = \langle M \partial \rangle_1 = \sum_{|R|=1} (\partial_R f) e_R = M \partial$

$$
\begin{aligned}
M \partial + (-1)^k \partial M &= M \partial + (-1)^0 \partial M \\
&= M \partial + \partial M \\
&= M \partial + M \partial \\
&= 2M\partial
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{2}[M \partial + (-1)^k \partial M] = M \partial = M \uparrow \partial$

$\partial \downarrow M = 0 \ \ (por\ definicion)$

$$
\begin{aligned}
M \partial - (-1)^k \partial M &= M \partial - (-1)^0 \partial M \\
&= M \partial - \partial M \\
&= M \partial - M \partial \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{2}[M\reflectbox{∂}-(-1)^k\reflectbox{∂}M] = 0 = M \downarrow \reflectbox{∂}$$

$$M \downarrow \reflectbox{∂} + M \uparrow \reflectbox{∂} = 0 + M\reflectbox{∂} = M\reflectbox{∂}$$

$$M \uparrow \reflectbox{∂} = M\reflectbox{∂} = \reflectbox{∂}M = \reflectbox{∂} \uparrow M = (-1)^k \reflectbox{∂} \uparrow M \;\; para \;\; k = 0$$

$$M \downarrow \reflectbox{∂} = 0 = -(-1)^k \reflectbox{∂} \downarrow M$$

Para k = 4

$$\reflectbox{∂} \uparrow M = 0 \;\; (por\ definicion)$$

$$\begin{aligned}
\reflectbox{∂}M + (-1)^k M\reflectbox{∂} &= \reflectbox{∂}M + (-1)^4 M\reflectbox{∂} \\
&= \reflectbox{∂}M + M\reflectbox{∂} \\
&= \reflectbox{∂}M + \reflectbox{∂}M \\
&= \reflectbox{∂}M + (-\reflectbox{∂}M) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}[\reflectbox{∂}M + (-1)^k M\reflectbox{∂}] = 0 = \reflectbox{∂} \uparrow M$$

$$\reflectbox{∂} \downarrow M = \langle \reflectbox{∂}M \rangle_{k-1} = \langle \reflectbox{∂}M \rangle_3 = \sum_{|R|=1} (\partial_R f) e_R e_{1234} = \reflectbox{∂}M$$

$$\begin{aligned}
\reflectbox{∂}M - (-1)^k M\reflectbox{∂} &= \reflectbox{∂}M - (-1)^4 M\reflectbox{∂} \\
&= \reflectbox{∂}M - M\reflectbox{∂} \\
&= \reflectbox{∂}M - (-\reflectbox{∂}M) \\
&= 2\reflectbox{∂}M
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}[\reflectbox{∂}M - (-1)^k M\reflectbox{∂}] = \reflectbox{∂}M = \reflectbox{∂} \downarrow M$$

$$\reflectbox{∂} \downarrow M + \reflectbox{∂} \uparrow M = \reflectbox{∂}M + 0 = \reflectbox{∂}M$$

$$M \uparrow \reflectbox{∂} = 0 \;\; (por\ definicion)$$

$$\begin{aligned}
M\reflectbox{∂} + (-1)^k \reflectbox{∂}M &= M\reflectbox{∂} + (-1)^4 \reflectbox{∂}M \\
&= M\reflectbox{∂} + \reflectbox{∂}M \\
&= M\reflectbox{∂} + (-M\reflectbox{∂}) \\
&= \reflectbox{∂}M + (-\reflectbox{∂}M) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}[M\reflectbox{∂} + (-1)^k \reflectbox{∂}M] = 0 = M \uparrow \reflectbox{∂}$$

$$M \downarrow \reflectbox{∂} = \langle M\reflectbox{∂} \rangle_{k-1} = \langle \reflectbox{∂}M \rangle_3 = \sum_{|R|=1} (\partial_R f) e_{1234} e_R = M\reflectbox{∂}$$

$$
\begin{aligned}
M\reflectbox{∂}-(-1)^k\reflectbox{∂}M &= M\reflectbox{∂}-(-1)^4\reflectbox{∂}M\\
&= M\reflectbox{∂}-\reflectbox{∂}M\\
&= M\reflectbox{∂}-(-M\reflectbox{∂})\\
&= 2M\reflectbox{∂}
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{2}[M\reflectbox{∂}-(-1)^k\reflectbox{∂}M] = M\reflectbox{∂} = M\downarrow\reflectbox{∂}$$

$$M\downarrow\reflectbox{∂}+M\uparrow\reflectbox{∂} = M\reflectbox{∂}+0 = M\reflectbox{∂}$$

$$M\downarrow\reflectbox{∂} = M\reflectbox{∂} = -\reflectbox{∂}M = -(-1)^k\reflectbox{∂}M = -(-1)^k\reflectbox{∂}\downarrow M \;\; para \;\; k=4$$

$\blacksquare$

4.5. Relación entre la derivada geométrica en AG(3,1) y la derivada geométrica en AG(3)

Se dara una conexión entre $\reflectbox{$\partial$}M$ y ∇M

$$M = \sum_{|I|=k} f_I e_I \in C^1[\Omega\times I;\langle AG(3)\rangle_k] \subset C^1[\Omega\times I;\langle AG(3,1)\rangle_k]$$

$$\reflectbox{∂}M = \sum_{n=1}^{3} e_n\partial_n M - e_4\partial_t M$$

$$\reflectbox{∂}M = \nabla M - e_4\partial_t M$$

$$\nabla M = \reflectbox{∂}M + e_4\partial_t M$$

Ahora se dará una conexión entre $\reflectbox{$\partial$}\uparrow M$ y $\reflectbox{$\partial$}\downarrow M$ con $\nabla\uparrow M$ y $\nabla\downarrow M$ respectivamente

$$\sum_{|J|=1} e_J\partial_J \equiv \sum_{n=1}^{3} e_n\partial_n$$

$$
\begin{aligned}
\reflectbox{∂}M &= \sum_{n=1}^{3} e_n\partial_n M - e_4\partial_t M\\
&\equiv \sum_{|J|=1} e_J\partial_J M - e_4\partial_t M\\
&= \sum_{|J|=1} e_J\partial_J\Big(\sum_{|I|=k} f_I e_I\Big) - e_4\partial_t\Big(\sum_{|I|=k} f_I e_I\Big)\\
&= \sum_{|J|=1}\sum_{|I|=k}\partial_J f_I e_J e_I - \sum_{|I|=k}\partial_t f_I e_4 e_I
\end{aligned}
$$

$$\equiv \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I + \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I - \Big(\sum_{\{4\}\cap I\neq\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I + \sum_{\{4\}\cap I=\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I \Big)$$

$$= \underbrace{\sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I}_{(k-1)\_vectorial} + \underbrace{\sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I}_{(k+1)\_vectorial} - \underbrace{\sum_{\{4\}\cap I=\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I}_{(k+1)\_vectorial}$$

$$= \underbrace{\sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I}_{(k-1)\_vectorial} + \underbrace{\sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I - \sum_{\{4\}\cap I=\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I}_{.\ funcion\ \ (k+1)\_vectorial\ .}$$

$$\begin{aligned} \eth \uparrow M = \langle \eth M\rangle_{k+1} &= \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I - \sum_{\{4\}\cap I=\emptyset} \partial_t f_I e_4 e_I \\ &= \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I - e_4 \partial_t M \\ &= \underbrace{\sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I}_{.\ \ \nabla\uparrow M\ \ .} - \partial_t(e_4 M) \end{aligned}$$

Luego

$\eth \uparrow M = \nabla \uparrow M - \partial_t(e_4 M)$

y de este modo se obtiene una importante relación que conecta a las derivadas exterior en AG(3,1) con la derivada exterior en AG(3)

$$\nabla \uparrow M = \eth \uparrow M + \partial_t(e_4 M)$$

Tambien

$$\begin{aligned} \eth \uparrow M = \langle \eth M\rangle_{k-1} &= \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I \\ &= \nabla \downarrow M \end{aligned}$$

y del mismo modo que en el anterior caso, se obtiene una importante relacion que conecta la derivada interior en AG(3,1) con la derivada interior en AG(3)

$$\eth \downarrow M = \nabla \downarrow M$$

Proposición 4.5.1. *Sea* $M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_k] \subset C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_k]$ *con* $0 \leq k < 4$ *entonces*

1. $(\eth \uparrow M)e_{123} = \eth \downarrow (Me_{123}) + (-1)^k \partial_t (Me_{1234})$
2. $(\eth \downarrow M)e_{123} = \eth \uparrow (Me_{123}) - (-1)^k \partial_t (Me_{1234})$
3. $(\eth M)e_{123} = \eth (Me_{123})$

Demostración. .

$\eth \downarrow (Me_{123}) = \nabla \downarrow (Me_{123})$

$= (\nabla \uparrow M)e_{123}$

$= [\eth \uparrow M + \partial_t(e_4 M)]e_{123}$

$= (\eth \uparrow M)e_{123} + (-1)^k \partial_t(e_4 M)e_{123}$

$= (\eth \uparrow M)e_{123} + (-1)^k \partial_t M e_4 e_{123}$

$= (\eth \uparrow M)e_{123} + (-1)^k \partial_t M(-e_{123}e_4)$

$= (\eth \uparrow M)e_{123} - (-1)^k \partial_t(Me_{1234})$

$\eth \downarrow (Me_{123}) + (-1)^k \partial_t(Me_{1234}) = (\eth \uparrow M)e_{123}$

Para la siguiente igualdad

$\eth \downarrow M)e_{123} = \nabla \downarrow M)e_{123}$

$= \nabla \uparrow (Me_{123})$

$= \eth \uparrow (Me_{123}) + \partial_t(e_4 M e_{123})$

$= \eth \uparrow (Me_{123}) + \partial_t[(-1)^k M e_4 e_{123}]$

$= \eth \uparrow (Me_{123}) + (-1)^k \partial_t[M(e_4 e_{123})]$

$= \eth \uparrow (Me_{123}) + (-1)^k \partial_t[M(-e_{123}e_4)]$

$= \eth \uparrow (Me_{123}) - (-1)^k \partial_t(Me_{1234})$

Sumando (1) y (2):

$(\eth \uparrow M)e_{123} + (\eth \downarrow M)e_{123} = \eth \downarrow (Me_{123}) + \eth \uparrow (Me_{123})$

$(\eth \uparrow M + \eth \downarrow M)e_{123} = \eth(Me_{1234})$

$(\eth M)e_{123} = \eth(Me_{1234})$

■

Proposición 4.5.2. *Sea* $M \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_k] \subset C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_k]$ *con* $0 \leq k < 4$ *entonces*

1. $(\eth \uparrow M)e_4 = \eth \uparrow (Me_4) + (-1)^k \partial_t M$

2. $(\eth \downarrow M)e_4 = \eth \downarrow (Me_4) - (-1)^k \partial_t M$

3. $(\eth M)e_4 = \eth(Me_4)$

Demostración. .

De AG(3) , se tiene

$$M = \sum_{|I|=k} f_I e_I \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_k] \subset C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_k]$$

$$\nabla = \sum_{n=1}^{3} e_n \partial_n \equiv \sum_{|J|=1} e_J \partial_J$$

$$\nabla M \equiv \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I + \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I$$

$$\nabla \uparrow M = \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I$$

$$\nabla \downarrow M = \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I$$

Luego

$$\begin{aligned}
(\eth \uparrow M)e_4 &= [\nabla \uparrow M - \partial_t(e_4 M)]e_4 \\
&= (\nabla \uparrow M)e_4 - \partial_t(e_4 M e_4) \\
&= \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I e_4 \quad - \quad \partial_t[(-1)^k M e_4 e_4] \\
&= \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I e_4 \quad - \quad \partial_t[(-1)^k M(-1)] \\
&= \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I e_4 \quad + \quad (-1)^k \partial_t M
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$M e_4 = \sum_{|I|=k} f_I e_I e_4 \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_{k+1}]$$

y denotando

$$\sum_{n=1}^{3} e_n \partial_n \equiv \sum_{|J|=1} e_J \partial_J$$

$$\begin{aligned}
\eth(M e_4) &= \sum_{|J|=1} e_J[\partial_J(M e_4)] - e_4 \partial_t(M e_4) \\
&= \sum_{|J|=1} e_J \partial_J(\sum_{|I|=k} f_I e_I e_4) - \partial_t(e_4 M e_4)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{|J|=1} \sum_{|I|=k} \partial_J f_I e_J e_I e_4 - \partial_t[(-1)^k M e_4 e_4]$$

$$= \underbrace{\sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I e_4}_{(k+2)\_vectorial} \quad + \quad \underbrace{\sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I e_4}_{(k)\_vectorial} \qquad \underbrace{(-1)^k \partial_t M}_{(k)\_vectorial}$$

$$\reflectbox{∂} \uparrow (Me_4) = \langle \reflectbox{∂}(Me_4)\rangle_{(k+1)+1} = \langle \reflectbox{∂}(Me_4)\rangle_{k+2} = \sum_{J\cap I=\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I e_4$$

por lo tanto

$$(\reflectbox{∂} \uparrow M)e_4 = \reflectbox{∂} \uparrow (Me_4) + (-1)^k \partial_t M$$

para la otra igualdad

$$(\reflectbox{∂} \downarrow M)e_4 = (\nabla \downarrow M)e_4 = \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I e_4$$

y de lo anterior

$$\reflectbox{∂} \downarrow (Me_4) = \langle \reflectbox{∂}(Me_4)\rangle_{(k+1)-1} = \langle \reflectbox{∂}(Me_4)\rangle_{k} = \sum_{J\cap I\neq\emptyset} \partial_J f_I e_J e_I e_4 + (-1)^k \partial_t M$$

por lo tanto

$$\reflectbox{∂} \downarrow (Me_4) = (\reflectbox{∂} \downarrow M)e_4 + (-1)^k \partial_t M$$

$$(\reflectbox{∂} \downarrow M)e_4 = \reflectbox{∂} \downarrow (Me_4) - (-1)^k \partial_t M$$

Sumando 1. y 2.

$$(\reflectbox{∂} \uparrow M)e_4 \;+\; (\reflectbox{∂} \downarrow M)e_4 = \reflectbox{∂} \uparrow (Me_4) \;+\; \reflectbox{∂} \downarrow (Me_4)$$

$$(\reflectbox{∂} \uparrow M \;+\; (\reflectbox{∂} \downarrow M)e_4 = \reflectbox{∂} \downarrow (Me_4) \;+\; \reflectbox{∂} \uparrow (Me_4)$$

$$(\reflectbox{∂} M)e_4 = \reflectbox{∂}(Me_4)$$

■

4.6. Campos multivectoriales

Definición 4.6.1. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ e I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.*

1. $C^1[\Omega \times I, (\Omega \times I) \times AG(3,1)]$ *denota las funciones de clase* C^1

$$M : \Omega \times I \longrightarrow (\Omega \times I) \times \times AG(3,1)$$

2. $\Gamma[\Omega \times I, AG(3,1)]$ *denota los llamados* ***campos multivectoriales*** *en AG(3,1), es decir ;*

   $M \in \Gamma[\Omega \times I, AG(3,1)]$ *si* $M \in C^1[\Omega \times I, (\Omega \times I) \times AG(3,1)]$ *y* $\pi \circ M = 1_{\Omega \times I}$

$$\begin{tikzcd}
(\Omega\times I)\times AG(3,1) \arrow[d, bend right, "\pi"'] \\
\Omega\times I \arrow[u, bend right, "M"']
\end{tikzcd}$$

   donde $1_{\Omega \times I} \in C^1[\Omega \times I, \Omega \times I]$ *es la aplicación identidad y* π *es la proyección a la primera componente.*

Proposición 4.6.2. $\Gamma[\Omega \times I, AG(3,1)] = \{(1_{\Omega \times I}; m)/m \in C^1[\Omega \times I, AG(3,1)]\}$

Demostración. .

Sea $M \in \Gamma[\Omega \times I, AG(3,1)]$, como

$M = (a; m)$ con $a \in C^1[\Omega \times I, \Omega \times I]$ y $m \in C^1[\Omega \times I, AG(3,1)]$, se tiene

$$a(\mathbf{x}; t) = \pi(a(\mathbf{x}; t); m(\mathbf{x}; t)) = \pi \circ M(\mathbf{x}; t) = \pi(M(\mathbf{x}; t)) = 1_{\Omega \times I}(\mathbf{x}; t)$$

para todo $(\mathbf{x}; t) \in \Omega \times I$

De esta forma

a = $1_{\Omega \times I}$ y $M = (1_{\Omega \times I}; m)$

■

Definición 4.6.3. *En las condiciones de la definición 4.6.1.*

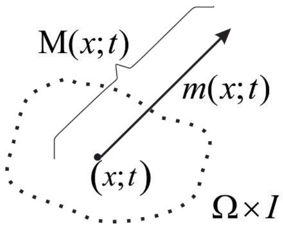
$\Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_k]$ *denota a los* ***campos k - vectoriales*** *en AG(3,1) , es decir ;*

$$\Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_k] = \{(1_{\Omega \times I}; m)/m \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_k]\}$$

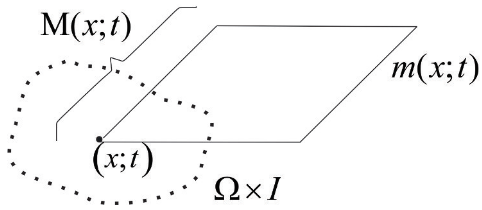
Observación 14. .

1. $\Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_k] \subset \Gamma[\Omega \times I, AG(3,1)]$

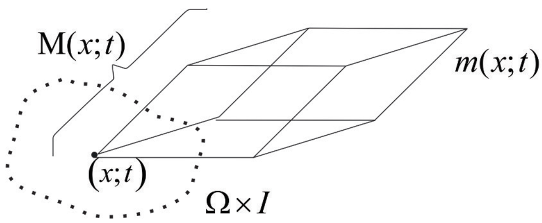
2. *Si k = 1 ,* $M \in \Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_1]$ *será llamada simplemente* ***campo vectorial*** *en AG(3,1)*



3. *Si k = 2 ,* $M \in \Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_2]$ *será llamado simplemente* ***campo bivectorial*** *en AG(3,1)*



4. *Si k = 3 ,* $M \in \Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_3]$ *será llamado simplemente* ***campo trivectorial*** *en AG(3,1)*



5. *Si k = 0 ,* $M \in \Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_0]$ *será llamado simplemente* ***campo escalar*** *en AG(3,1)*

6. *Si k = 4 ,* $M \in \Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_4]$ *será llamado simplemente* ***campo tetravectorial o pseudoescalar*** *en AG(3,1)*

Definición 4.6.4. *Dado* $M = (1_{\Omega\times I}; m)$ *y* $P = (1_{\Omega\times I}; p) \in \Gamma[\Omega \times I, AG(3,1)]$ *;* $f \in C^1[\Omega \times I, \mathbb{R}]$ *;* $s \in AG(3,1)$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$

1. *La suma de M y P, denotado con* $M + P = (1_{\Omega\times I}; m + p) \in \Gamma[\Omega \times I, AG(3,1)]$*, se define*

   $(M{+}P)(x,t) = ((x;t); m(x;t){+}p(x;t))$

   para todo $(x;t) \in \Omega \times I$

2. *La multiplicación* $fM = (1_{\Omega\times I}; fm), sM = (1_{\Omega\times I}; sm), Ms = (1_{\Omega\times I}; ms), \alpha M = (1_{\Omega\times I}; \alpha m) \in \Gamma[\Omega \times I, AG(3,1)]$ *, se definen*

   $fM(x,t) = ((x;t); fm(x;t))$

   $sM(x,t) = ((x;t); sm(x;t))$

   $Ms(x,t) = ((x;t); m(x;t)s)$

   $\alpha M(x,t) = ((x;t); \alpha m(x;t))$

   para todo $(x;t) \in \Omega \times I$

3. *El producto geométrico de M y P , denotado con* $MP = (1_{\Omega\times I}; mp) \in \Gamma[\Omega \times I, AG(3,1)]$ *, se define*

   $(MP)(x,t) = ((x;t); m(x;t)p(x;t))$

   para todo $(x;t) \in \Omega \times I$

Proposición 4.6.5. $\Gamma[\Omega \times I, AG(3,1)]$ *y* $\Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_k]$ *son*

1. $\mathbb{R}$*_espacios vectoriales*
2. $C^1[\Omega \times I, \mathbb{R}]$*_módulo*
3. $AG(3,1)$*_módulo*

Definición 4.6.6. *Sea* $M = (1_{\Omega\times I}; m) \in \Gamma[\Omega \times I, AG(3,1)]$

1. $\partial_n M = (1_{\Omega\times I}; \partial_n m) \in \Gamma[\Omega \times I, AG(3,1)]$*, llamada la* ***n_ésima derivada parcial*** *de M para campos multivectoriales en AG(3,1), se define*

   $\partial_n M(x,t) := ((x;t); \partial_n m(x;t))$

   para todo $(x;t) \in \Omega \times I$

   Aqui $\partial_n m \in C^1[\Omega \times I, AG(3,1)]$ *es la n_ésima derivada parcial de la función multivectorial m y* $\partial_1 \equiv \partial_x$ *,* $\partial_2 \equiv \partial_y$ *,* $\partial_3 \equiv \partial_z$ *,* $\partial_4 \equiv \partial_t$

2. $\partial M = (1_{\Omega \times I}, \partial m) \in \Gamma[\Omega \times I; AG(3)]$, *llamada* ***derivada geométrica por izquierda*** *de M para campos multivectoriales en AG(3,1), se define*

   $\partial M(x,t) := ((x;t); \partial m(x;t))$

   para todo $(x;t) \in \Omega \times I$

   Aqui ∂m *denota a la derivada geométrica por izquierda de m para funciones multivectoriales*

3. $M\partial = (1_{\Omega \times I}; m\partial) \in \Gamma[\Omega \times I, AG(3,1)]$, *llamada* ***derivada geométrica por derecha*** *de M para campos multivectoriales en AG(3,1), se define*

   $M\partial(x,t) := ((x;t); m\partial(x;t))$

   para todo $(x;t) \in \Omega \times I$

   Aqui $m\partial$ *es la derivada geométrica por derecha de m para funciones multivectoriales*

Teorema 4.6.7. *Sea* $M \in \Gamma[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_k]$ *con* $0 \leq k \leq 4$ *entonces*

1. $\partial M = \langle \partial M\rangle_{k-1} + \langle \partial M\rangle_{k+1}$ *para* $0 < k < 4$
2. $M\partial = \langle M\partial\rangle_{k-1} + \langle M\partial\rangle_{k+1}$ *para* $0 < k < 4$
3. $\partial M = \langle \partial M\rangle_{k+1}$ *y* $M\partial = \langle M\partial\rangle_{k+1}$ *para* $k = 0$
4. $\partial M = \langle \partial M\rangle_{k-1}$ *y* $M\partial = \langle M\partial\rangle_{k-1}$ *para* $k = 4$
5. $\langle M\partial\rangle_{k-1} = (-1)^{k-1}\langle \partial M\rangle_{k-1}$ *para* $0 < k$
6. $\langle M\partial\rangle_{k+1} = (-1)^{k}\langle \partial M\rangle_{k+1}$ *para* $k < 4$

Demostración. $M = (1_{\Omega \times I}; m) \in \Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_k]$ *con* $m \in C^1[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_k]$

Para $0 < k < 4$

$$\begin{aligned}\partial M &= (1_{\Omega \times I}; \partial m)\\ &= (1_{\Omega \times I}; \langle \partial m\rangle_{k-1} + \langle \partial m\rangle_{k+1})\\ &= (1_{\Omega \times I}; \langle \partial m\rangle_{k-1}) + (1_{\Omega \times I}; \langle \partial m\rangle_{k+1})\\ &= \langle \partial m\rangle_{k-1} + \langle \partial m\rangle_{k+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M\partial &= (1_{\Omega \times I}; m\partial)\\ &= (1_{\Omega \times I}; \langle m\partial\rangle_{k-1} + \langle m\partial\rangle_{k+1})\\ &= (1_{\Omega \times I}; \langle m\partial\rangle_{k-1}) + (1_{\Omega \times I}; \langle m\partial\rangle_{k+1})\\ &= \langle M\partial\rangle_{k-1} + \langle M\partial\rangle_{k+1}\end{aligned}$$

Para $k = 0$

$$\begin{aligned}
\partial M &= (1_{\Omega\times I}; \partial m)\\
&= (1_{\Omega\times I}; \langle \partial m\rangle_{k+1})\\
&= \langle \partial M\rangle_{k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M\partial &= (1_{\Omega\times I}; m\partial)\\
&= (1_{\Omega\times I}; \langle m\partial\rangle_{k+1})\\
&= \langle M\partial\rangle_{k+1}
\end{aligned}$$

Para $k = 4$

$$\begin{aligned}
\partial M &= (1_{\Omega\times I}; \partial m)\\
&= (1_{\Omega\times I}; \langle \partial m\rangle_{k-1})\\
&= \langle \partial M\rangle_{k-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M\partial &= (1_{\Omega\times I}; m\partial)\\
&= (1_{\Omega\times I}; \langle m\partial\rangle_{k-1})\\
&= \langle M\partial\rangle_{k-1}
\end{aligned}$$

Para $0 < k$

$$\begin{aligned}
\langle M\partial\rangle_{k-1} &= (1_{\Omega\times I}; \langle m\partial\rangle_{k-1})\\
&= (1_{\Omega\times I}; (-1)^{k-1}\langle \partial m\rangle_{k-1})\\
&= (-1)^{k-1}(1_{\Omega\times I}; \langle \partial m\rangle_{k-1})\\
&= (-1)^{k-1}\langle \partial M\rangle_{k-1}
\end{aligned}$$

Para $k < 4$

$$\begin{aligned}
\langle M\partial\rangle_{k+1} &= (1_{\Omega\times I}; \langle m\partial\rangle_{k+1})\\
&= (1_{\Omega\times I}; (-1)^{k}\langle \partial m\rangle_{k+1})\\
&= (-1)^{k}(1_{\Omega\times I}; \langle \partial m\rangle_{k+1})\\
&= (-1)^{k}\langle \partial M\rangle_{k+1}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Corolario 4.6.8. *Sea* $M \in \Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_k]$ *con* $0 \leq k \leq 4$ *entonces*

1. $\langle \partial M\rangle_{k+1} = \frac{1}{2}[\partial M + (-1)^k M\partial]$ *para* $k < 4$

2. $\langle \partial M\rangle_{k-1} = \frac{1}{2}[\partial M - (-1)^k M\partial]$ *para* $0 < k$

Demostración. $M = (1_{\Omega\times I}; m) \in \Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_k]$

Para $k < 4$

$$\partial M = (1_{\Omega\times I}; \partial m)$$

$$\begin{aligned}
\langle \partial M\rangle_{k+1} &= (1_{\Omega\times I}; \langle \partial m\rangle_{k+1}) \\
&= (1_{\Omega\times I}; \frac{1}{2}[\partial m + (-1)^k m\partial] \\
&= \frac{1}{2}(1_{\Omega\times I}; \partial m + (-1)^k m\partial) \\
&= \frac{1}{2}[(1_{\Omega\times I}; \partial m) + (1_{\Omega\times I}; (-1)^k m\partial)] \\
&= \frac{1}{2}[(1_{\Omega\times I}; \partial m) + (-1)^k (1_{\Omega\times I}; m\partial)] \\
&= \frac{1}{2}[\partial M + (-1)^k M\partial]
\end{aligned}$$

Para $0 < k$

$$\partial M = (1_{\Omega\times I}; \partial m)$$

$$\begin{aligned}
\langle \partial M\rangle_{k-1} &= (1_{\Omega\times I}; \langle \partial m\rangle_{k-1}) \\
&= (1_{\Omega\times I}; \frac{1}{2}[\partial m - (-1)^k m\partial] \\
&= \frac{1}{2}(1_{\Omega\times I}; \partial m - (-1)^k m\partial) \\
&= \frac{1}{2}[(1_{\Omega\times I}; \partial m) + (1_{\Omega\times I}; -(-1)^k m\partial)] \\
&= \frac{1}{2}[(1_{\Omega\times I}; \partial m) - (-1)^k (1_{\Omega\times I}; m\partial)] \\
&= \frac{1}{2}[\partial M - (-1)^k M\partial]
\end{aligned}$$

■

Definición 4.6.9. *Sea* $M \in \Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_k] \quad con \quad 0 \le k \le 4$

1. $\eth \uparrow M = (1_{\Omega\times I}, \eth \uparrow m) \in \Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_k]$, *llamada derivada exterior por izquierda de M para campos multivectoriales en AG(3,1), se define*

$$\eth \uparrow M = ((\boldsymbol{x}, t), \eth \uparrow m(\boldsymbol{x}, t))$$

$(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times I$ *y* $\eth \uparrow m$ *denota a la derivada exterior por izquierda para funciones multivectoriales.*

2. $M \uparrow \eth = (1_{\Omega\times I}, m \uparrow \eth) \in \Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_k]$, *llamada derivada exterior por dercha de M para campos multivectoriales en AG(3,1), se define*

$$M \uparrow \eth = ((\boldsymbol{x}, t), m \uparrow \eth(\boldsymbol{x}, t))$$

$(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times I$ *y* $m \uparrow \eth$ *denota a la derivada exterior por derecha para funciones multivectoriales.*

3. $\eth \downarrow M = (1_{\Omega\times I}, \eth \downarrow m) \in \Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_{k-1}]$, *llamada derivada interior por izquierda de M para campos multivectoriales en AG(3,1), se define*

$$\eth \downarrow M = ((\boldsymbol{x}, t), \eth \downarrow m(\boldsymbol{x}, t))$$

$(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times I$ *y* $\eth \downarrow m$ *denota a la derivada interior por izquierda para funciones multivectoriales.*

4. $M \downarrow \eth = (1_{\Omega\times I}, m \downarrow \eth) \in \Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_{k-1}]$, *llamada derivada interior por derecha de M para campos multivectoriales en AG(3,1), se define*

$$M \downarrow \eth = ((\boldsymbol{x}, t), m \downarrow \eth(\boldsymbol{x}, t))$$

$(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times I$ *y* $m \downarrow \eth$ *denota a la derivada interior por derecha para funciones multivectoriales.*

Teorema 4.6.10. *Sea* $M \in \Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_k] \quad con \quad 0 \le k \le 4 \quad , \quad entonces$

1. $\eth \uparrow M = \dfrac{1}{2}[\eth M + (-1)^k M\eth]$
2. $\eth \downarrow M = \dfrac{1}{2}[\eth M - (-1)^k M\eth]$
3. $\eth M = \eth \downarrow M + \eth \uparrow M$
4. $M \uparrow \eth = \dfrac{1}{2}[M\eth + (-1)^k \eth M]$
5. $M \downarrow \eth = \dfrac{1}{2}[M\eth - (-1)^k \eth M]$
6. $M\eth = M \downarrow \eth + M \uparrow \eth$
7. $M \uparrow \eth = (-1)^k \eth \uparrow M$

8. $M \downarrow \partial = -(-1)^k \partial \downarrow M$

Demostración. $M = (1_{\Omega\times I}; m) \in \Gamma[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_k]$

$$
\begin{aligned}
\partial \uparrow M &= (1_{\Omega\times I}, \partial \uparrow m)\\
&= (1_{\Omega\times I}; \frac{1}{2}[\partial m + (-1)^k m\partial])\\
&= \frac{1}{2}(1_{\Omega\times I}, \partial m + (-1)^k m\partial)\\
&= \frac{1}{2}[(1_{\Omega\times I}, \partial m) + (1_{\Omega\times I}, (-1)^k m\partial)]\\
&= \frac{1}{2}[\partial M + (-1)^k M\partial]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial \downarrow M &= (1_{\Omega\times I}, \partial \downarrow m)\\
&= (1_{\Omega\times I}; \frac{1}{2}[\partial m - (-1)^k m\partial])\\
&= \frac{1}{2}(1_{\Omega\times I}, \partial m - (-1)^k m\partial)\\
&= \frac{1}{2}[(1_{\Omega\times I}, \partial m) - (1_{\Omega\times I}, (-1)^k m\partial)]\\
&= \frac{1}{2}[\partial M - (-1)^k M\partial]
\end{aligned}
$$

De 1. y 2.

$$
\begin{aligned}
\partial \downarrow M + \partial \uparrow M &= \frac{1}{2}[\partial M - (-1)^k M\partial] + \frac{1}{2}[\partial M + (-1)^k M\partial]\\
&= \frac{1}{2}\partial M - \frac{1}{2}(-1)^k M\partial + \frac{1}{2}\partial M + \frac{1}{2}(-1)^k M\partial\\
&= 2(\frac{1}{2}\partial M)\\
&= \partial M
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M \uparrow \partial &= (1_{\Omega\times I}, m \uparrow \partial)\\
&= (1_{\Omega\times I}, \frac{1}{2}[m\partial + (-1)^k \partial m])\\
&= \frac{1}{2}(1_{\Omega\times I}, m\partial + (-1)^k \partial m)\\
&= \frac{1}{2}[(1_{\Omega\times I}, m\partial) + (1_{\Omega\times I}, (-1)^k \partial m)]\\
&= \frac{1}{2}[M\partial + (-1)^k \partial M]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M \downarrow \eth &= (1_{\Omega\times I}, m \downarrow \eth) \\
&= (1_{\Omega\times I}; \frac{1}{2}[m\eth - (-1)^k m\eth]) \\
&= \frac{1}{2}(1_{\Omega\times I}, \eth m - (-1)^k \eth m) \\
&= \frac{1}{2}[(1_{\Omega\times I}, m\eth) - (-1)^k (1_{\Omega\times I}, \eth m)] \\
&= \frac{1}{2}[M\eth - (-1)^k \eth M]
\end{aligned}
$$

De 4. y 5.

$$
\begin{aligned}
M \downarrow \eth + M \uparrow \eth &= \frac{1}{2}[M\eth - (-1)^k \eth M] + \frac{1}{2}[M\eth + (-1)^k \eth M] \\
&= \frac{1}{2}M\eth - \frac{1}{2}(-1)^k \eth M + \frac{1}{2}M\eth + \frac{1}{2}(-1)^k \eth M \\
&= 2(\frac{1}{2}M\eth) \\
&= M\eth
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M \uparrow \eth &= (1_{\Omega\times I}, m \uparrow \eth) \\
&= (1_{\Omega\times I}, (-1)^k \eth \uparrow m) \\
&= (-1)^k (1_{\Omega\times I}, \eth \uparrow m) \\
&= (-1)^k \eth \uparrow M
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M \downarrow \eth &= (1_{\Omega\times I}, m \downarrow \eth) \\
&= (1_{\Omega\times I}, -(-1)^k \eth \downarrow m) \\
&= -(-1)^k (1_{\Omega\times I}, \eth \downarrow m) \\
&= -(-1)^k \eth \downarrow M
\end{aligned}
$$

■

Proposición 4.6.11. *Sea* $M \in \Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3)\rangle_k] \subset \Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_k]$ *con* $0 \leq k < 4$ *, entonces*

1. $(\eth \uparrow M)e_{123} = \eth \downarrow (Me_{123}) + (-1)^k \partial_t (Me_{1234})$
2. $(\eth \downarrow M)e_{123} = \eth \uparrow (Me_{123}) - (-1)^k \partial_t (Me_{1234})$
3. $(\eth M)e_{123} = \eth (Me_{123})$

Demostración. $M = (1_{\Omega\times I}, m) \in \Gamma[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_k]$
$\Gamma[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_k] = \{(1_{\Omega\times I}, m); m \in C^1[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_k] \subset C^1[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_k]\}$

$$\begin{aligned}
(\eth\uparrow M)e_{123} &= (1_{\Omega\times I}, \eth\uparrow m)e_{123}\\
&= (1_{\Omega\times I}, (\eth\uparrow m)e_{123})\\
&= (1_{\Omega\times I}, \eth\downarrow(me_{123}) + (-1)^k\partial_t(me_{1234}))\\
&= (1_{\Omega\times I}, \eth\downarrow(me_{123})) + (1_{\Omega\times I}, (-1)^k\partial_t(me_{1234}))\\
&= \eth\downarrow(Me_{123}) + (-1)^k\partial_t(Me_{1234})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\eth\downarrow M)e_{123} &= (1_{\Omega\times I}, \eth\downarrow m)e_{123}\\
&= (1_{\Omega\times I}, (\eth\downarrow m)e_{123})\\
&= (1_{\Omega\times I}, \eth\uparrow(me_{123}) - (-1)^k\partial_t(me_{1234}))\\
&= (1_{\Omega\times I}, \eth\uparrow(me_{123})) - (1_{\Omega\times I}, (-1)^k\partial_t(me_{1234}))\\
&= \eth\uparrow(Me_{123}) - (-1)^k\partial_t(Me_{1234})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\eth M)e_{123} &= (\eth\downarrow M + \eth\uparrow M)e_{123}\\
&= (\eth\downarrow M)e_{123} + (\eth\uparrow M)e_{123}\\
&= \eth\uparrow(Me_{123}) - (-1)^k\partial_t(Me_{1234}) + \eth\downarrow(Me_{123}) + (-1)^k\partial_t(Me_{1234})\\
&= \eth(Me_{123})
\end{aligned}$$

■

Proposición 4.6.12. *Sea* $M \in \Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3)\rangle_k] \subset \Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3,1)\rangle_k]$ *con* $0 \leq k < 4$, *entonces*

1. $(\eth\uparrow M)e_4 = \eth\uparrow(Me_4) + (-1)^k\partial_t M$
2. $(\eth\downarrow M)e_4 = \eth\downarrow(Me_4) - (-1)^k\partial_t M$
3. $(\eth M)e_4 = \eth(Me_4)$

Demostración. $M = (1_{\Omega\times I}, m) \in \Gamma[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_k]$

$$\begin{aligned}
(\eth\uparrow M)e_4 &= (1_{\Omega\times I}, (\eth\uparrow m))e_4\\
&= (1_{\Omega\times I}, (\eth\uparrow m)e_4)\\
&= (1_{\Omega\times I}, \eth\uparrow(me_4) + (-1)^k\partial_t m)\\
&= (1_{\Omega\times I}, \eth\uparrow(me_4)) + (1_{\Omega\times I}, (-1)^k\partial_t m)\\
&= \eth\uparrow(Me_4) + (-1)^k\partial_t M
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\partial \downarrow M)e_4 &= (1_{\Omega\times I}, (\partial \downarrow m))e_4 \\
&= (1_{\Omega\times I}, (\partial \downarrow m)e_4) \\
&= (1_{\Omega\times I}, \partial \downarrow (me_4) - (-1)^k \partial_t m) \\
&= (1_{\Omega\times I}, \partial \downarrow (me_4)) - (1_{\Omega\times I}, (-1)^k \partial_t m) \\
&= \partial \downarrow (Me_4) - (-1)^k \partial_t M
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\partial M)e_4 &= (\partial \downarrow M + \partial \uparrow M)e_4 \\
&= (\partial \downarrow M)e_4 + (\partial \uparrow M)e_4 \\
&= \partial \downarrow (Me_4) - (-1)^k \partial_t M + \partial \uparrow (Me_4) + (-1)^k \partial_t M \\
&= \partial \downarrow (Me_4) + \partial \uparrow (Me_4) \\
&= \partial (Me_4)
\end{aligned}
$$

■

Capítulo 5

Sobre las ecuaciones de Maxwell

Considerando las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times B = \partial_t E + J \qquad .... \ (1)$$
$$\nabla \cdot B = 0 \qquad .... \ (2)$$
$$\nabla \times E = -\partial_t B \qquad .... \ (3)$$
$$\nabla \cdot E = \rho \qquad .... \ (4)$$

donde $B, E, J \in \chi(\Omega \times I, \mathbb{R}^3)$ *son campos vectoriales y* $\rho \in \chi(\Omega \times I, \mathbb{R})$ *es un campo escalar que en fisica son llamados:*

B : campo inducción magnética

E : campo electrico

J : campo densidad de corriente electrica

ρ: campo densidad de carga

$\nabla\times$ *es el operador rotacional*

$\nabla\cdot$ *es el operador divergencia*

5.1. Las ecuaciones de Maxwell en el contexto de AG(3)

Consideremos $B, E, J \in \Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3)\rangle_1]$ *y* $\rho \in \Gamma[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_0] \cong \Gamma[\Omega \times I; \mathbb{R}]$, $\nabla\times$ *y* $\nabla\cdot$ *son , en este contexto, la derivada vectorial y escalar para campos vectoriales en AG(3) repectivamente.*

De (1)

$\nabla \times B = \partial_t E + J$

$-\nabla \times B = -\partial_t E - J$

$(\nabla \uparrow B)e_{123} = -\partial_t E - J$

$\nabla \downarrow Be_{123} = -\partial_t E - J$

De (2)

$\nabla \cdot B = 0$

$\nabla \downarrow B = 0$

$(\nabla \downarrow B)e_{123} = 0$

$\nabla \uparrow Be_{123} = 0$

Luego

$\nabla \downarrow Be_{123} + \nabla \uparrow Be_{123} = -\partial_t E - J$

$\nabla Be_{123} = -\partial_t E - J$

De (3) y (4)

$\nabla \times E = -\partial_t B$

$(\nabla \times E)e_{123} = -\partial_t(Be_{123})$

$\nabla \uparrow E = -\partial_t(Be_{123})$

Luego

$\nabla \uparrow E + \nabla \cdot E = \nabla \uparrow E + \nabla \downarrow E = -\partial_t(Be_{123}) + \rho$

$\nabla E = -\partial_t(Be_{123}) + \rho$

Finalmente

$\nabla E + \nabla Be_{123} = -\partial_t(Be_{123}) + \rho - \partial_t E - J$

$\partial_t(E + Be_{123}) + \nabla(E + Be_{123}) = \rho - J$

obteniendose

$$(\partial_t + \nabla)(E + Be_{123}) = \rho - J \qquad \ldots\ldots. \ (5)$$

Todo lo anterior se resume el el siguiente teorema

Teorema 5.1.1. *Sean* $B, E, J \in \Gamma[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_1] \cong \Gamma[\Omega \times I; \mathbb{R}^3]$ *y* $\rho \in \Gamma[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_0] \cong \Gamma[\Omega \times I; \mathbb{R}]$ *. Las cuatro ecuaciones de Maxwell*

$$\nabla \times B = \partial_t E + J$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E = -\partial_t B$$

$$\nabla \cdot E = \rho$$

se reducen , en el contexto del álgebra geométrica AG(3), a una única ecuación

$$(\partial_t + \nabla)(E + Be_{123}) = \rho - J$$

■

5.2. Las ecuaciones de Maxwell en el contexto de AG(3,1)

Consideramos $B, E, J \in \Gamma[\Omega \times I; \langle AG(3)\rangle_1] \subset \Gamma[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_1]$ *y* $\rho \in \Gamma[\Omega \times I; \langle AG(3,1)\rangle_0] \cong \Gamma[\Omega \times I; \mathbb{R}]$ *, ahora , en el contexto de AG(3,1) ,* $\nabla\times$ *y* $\nabla\cdot$ *serán expresados en terminos de la derivada geométrica* $\eth = \nabla - e_4\partial_t$

De (1)

$\nabla \times B = \partial_t E + J$

$-(\nabla \uparrow B)e_{123} = \partial_t E + J$

$-[\eth \uparrow B + \partial_t(e_4 B)]e_{123} = \partial_t E + J$

$-(\eth \uparrow B)e_{123} - \partial_t(e_4 B)e_{123} = \partial_t E + J$

$-[\eth \downarrow (Be_{123}) - \partial_t(Be_{1234})] - \partial_t(Be_{1234}) = \partial_t E + J$

$-\eth \downarrow (Be_{123}) + \partial_t(Be_{1234}) - \partial_t(Be_{1234}) = \partial_t E + J$

$-\eth \downarrow (Be_{123}) = \partial_t E + J$

$\eth \downarrow (-Be_{123}) = \partial_t E + J$ .... *(I)*

De (2)

$\nabla \cdot B = 0$

$\nabla \downarrow B = 0$

$\eth \downarrow B = 0$

$(\eth \downarrow -B)e_{123} = 0$

$\eth \uparrow (-Be_{123}) + \partial_t[e_4(-B)e_{123}] = 0$

$\eth \uparrow (-Be_{123}) - \partial_t(e_4 Be_{123}) = 0$

$\eth \uparrow (-Be_{123}) - \partial_t(Be_{1234}) = 0$ .... *(II)*

Sumando (I) y (II)

$\eth \downarrow (-Be_{123}) + \eth \uparrow (-Be_{123}) - \partial_t(Be_{1234}) = \partial_t E + J$

$\eth(-Be_{123}) = \partial_t(Be_{1234}) + \partial_t E + J$ .... *(III)*

De (3)

$\nabla \times E = -\partial_t B$

$-(\nabla \uparrow E)e_{123} = -\partial_t B$

$-(\nabla \uparrow E)e_{123}^2 = -\partial_t(Be_{123})$

$\nabla \uparrow E = \partial_t(-Be_{123})$

$\eth \uparrow E + \partial_t(e_4 E) = \partial_t(-Be_{123})$

$[\eth \uparrow E + \partial_t(e_4 E)]e_4 = \partial_t(-Be_{123})e_4$

$(\eth \uparrow E)e_4 + \partial_t(e_4 E)e_4 = -\partial_t(Be_{1234})$

$\quad \reflectbox{$\partial$} \uparrow (Ee_4) - \partial_t E + \partial_t E = -\partial_t(Be_{1234})$

$\reflectbox{$\partial$} \uparrow (Ee_4) = -\partial_t(Be_{1234})$ .... *(IV)*

De (4)

$\nabla \cdot E = \rho$

$\nabla \downarrow E = \rho$

$\reflectbox{$\partial$} \downarrow E = \rho$

$(\reflectbox{$\partial$} \downarrow E)e_4 = \rho e_4$

$\reflectbox{$\partial$} \downarrow (Ee_4) + \partial_t E = \rho e_4$ .... *(V)*

Sumando (IV) y (V)

$\reflectbox{$\partial$} \downarrow (Ee_4) + \reflectbox{∂} \uparrow (Ee_4) + \partial_t E = \rho e_4 - \partial_t(Be_{1234})$

$\reflectbox{$\partial$}(Ee_4) = -\partial_t E + \rho e_4 - \partial_t(Be_{1234})$ .... *(VI)*

Finalmente , sumando (III) y (VI)

$\reflectbox{$\partial$}(Ee_4) + \reflectbox{$\partial$}(-Be_{123}) = -\partial_t E + \rho e_4 - \partial_t(Be_{1234}) + \partial_t(Be_{1234}) + \partial_t E + J$

y por la linealidad de $\reflectbox{$\partial$}$

$$\reflectbox{∂}(Ee_4 - Be_{123}) = \rho e_4 + J$$

Todo lo anterior se resume en el siguiente teorema

Teorema 5.2.1. *Sean* $B, E, J \in \Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3) \rangle_1] \subset \Gamma[\Omega \times I, \langle AG(3,1) \rangle_1]$ *y* $\rho \in \Gamma[\Omega \times I, \mathbb{R}]$. *Las ecuaciones de Maxwell*

$$\nabla \times B = \partial_t E + J$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E = -\partial_t B$$

$$\nabla \cdot E = \rho$$

se reducen, en el contexto del álgebra geométrica AG(3,1), a una única ecuación

$$\reflectbox{∂}(Ee_4 - Be_{123}) = \rho e_4 + J$$

■

En fisica el campo bivectorial $F = Ee_4 - Be_{123}$ *es llamado* ***campo electromagnético en AG(3,1)***.

Bibliografía

[1] Dr. Edgar Vera Saravia, Álgebras geométricas euclideana tridimensionales *edverasar@unmsm.edu.pe 1era ed. 2014 departamento de matemática de la UNMSM, Lima,Perú.*

[2] Dr. Edgar Vera Saravia, Álgebras geométricas canónicas n-dimensionales. *everas@unmsm.edu.pe 1era ed. 2013 departamento de matemática de la UNMSM, Lima,Perú.*

[3] D. Hestenes, G. Sobczyk. , Clifford Algebra to Geometric Calculus. *Published by Reidel Publishing Company. Dordrecht,Holland, 1984, 1987.*

[4] *Ablamawics-Sobczyk* Lectures on Clifford (Geometric) Algebras and Applications; *Birkhauser, 2004.*

[5] *Bekken, O.* Una Historia Breve del Algebra; *Sociedad Matematica Peruana, 1983.*

[6] *Dirac, P.A.M.* The Mathematical Foundations of Quantum Theory; *Academic Press, Inc., 1978.*

[7] *Doran-Lasenby* Physical Applications of Geometric Algebra; *Lecture Course, Cambridge University.*

[8] *Hestenes,* New Foundations for Classical Mechanics; *Kluwer Academic Publishers, 1993.*

[9] *Lounesto, P.* Clifford Algebras and Spinors; *Cambridge University Press, 2001.*

[10] *Snigg, J.* Clifford Algebra, A Computacional tool for Physicists; *Oxford University Press, 1997.*

[11] *Sobczyk, G.* The hyperbolic number plane; *The College Mathematics Journal, Vol. 26, No. 4, 1995.*

[12] *Vaz Jr., J.* A álgebra geométrica do espaco euclideano e a teoría de Pauli; *Revista Brasileira de Ensino de Física, Vol. 19 numero 2, 1997.*

[13] *Vaz Jr., J. Revista Brasileira de Ensino de Física, Vol. 22 numero 1, 2000.* A álgebra geométrica do espaco-tempo e a teoría da relatividade; *Revista Brasileira de Ensino de Física, Vol. 22 numero 1, 2000.*